Esercizi sulle equazioni logaritmiche

Per definizione il logaritmo in base a di un numero positivo x, con $a > 0$ e $a \neq 1$, è l'esponente che occorre dare alla base a per ottenere il numero x. In simboli

$$\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y.$$

Per risolvere un'equazione logaritmica bisogna innanzitutto ricordare che l'argomento del logaritmo, qualunque sia la sua base, deve essere positivo, quindi occorre sempre, prima di fare qualunque calcolo, eliminare i valori che portano ad argomenti negativi o nulli.
Inoltre è utile richiamare quelle che sono le proprietà fondamentali dei logaritmi:

$$\begin{aligned}
&\log_a 1 = 0 \text{ qualunque sia la base } a\\
&\log_a c \cdot d = \log_a c + \log_a d\\
&\log_a \frac{c}{d} = \log_a c - \log_a d\\
&\log_a c^d = d \log c
\end{aligned}$$

- **Esercizio 1**: Risolvere la seguente equazione logaritmica

$$\log_{10} x + \log_{10} 3 = \log_{10} 12.$$

Soluzione

L'argomento dei vari logaritmi deve essere positivo. In questo caso la x compare solo nel primo logaritmo e quindi deve essere $x > 0$.
Utilizzando la proprietà dei logaritmi

$$\log_a c \cdot d = \log_a c + \log_a d$$

si trova

$$\log_{10} x + \log_{10} 3 = \log_{10} 12 \;\Rightarrow\; \log_{10} 3x = \log_{10} 12$$

e, siccome gli argomenti dei due logaritmi devono essere uguali, segue che deve essere

$$3x = 12 \;\Rightarrow\; x = 4.$$

Siccome 4 è positivo $x = 4$ è la soluzione cercata.

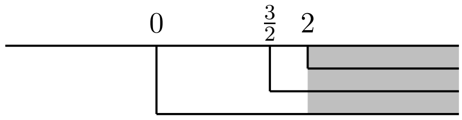
- **Esercizio 2**: Risolvere la seguente equazione logaritmica

$$\log_{10}(x-2) + \log_{10}(2x-3) = 2\log_{10} x.$$

Soluzione

L'argomento dei vari logaritmi deve essere positivo quindi occorre prima impostare il sistema:

$$\begin{cases} x - 2 > 0 & \text{per } x > 2,\\ 2x - 3 > 0 & \text{per } x > \frac{3}{2}\\ x > 0 & \text{per } x > 0 \end{cases}$$



Quindi si possono accettare solo le soluzioni maggiori di 2.
Usando le proprietà dei logaritmi:

$$\log_a c \cdot d = \log_a c + \log_a d; \qquad \log_a \frac{c}{d} = \log_a c - \log_a d; \qquad \log_a c^d = d \log c$$

si trova

$$\log_{10}(x-2) + \log_{10}(2x-3) = 2\log_{10} x \Rightarrow \log_{10}(x-2)(2x-3) - \log_{10} x^2 = 0$$

quindi

$$\log_{10} \frac{(x-2)(2x-3)}{x^2} = 0$$

Poiché, per definizione, il logaritmo di un numero è l'esponente che si deve dare alla base per ottenere il numero, si avrà

$$\log_{10} \frac{(x-2)(2x-3)}{x^2} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{(x-2)(2x-3)}{x^2} = 10^0 \;\Rightarrow\; \frac{(x-2)(2x-3)}{x^2} = 1$$

quindi avremo

$$\frac{(x-2)(2x-3)}{x^2} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{2x^2-7x+6}{x^2} - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \frac{2x^2-7x+6-x^2}{x^2} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{x^2-7x+6}{x^2} = 0$$

quindi

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{2} \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{2} \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \frac{7 \pm 5}{2} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 6 \end{cases}$$

Abbiamo trovato le soluzioni $x = 1$ e $x = 6$ ma di queste solo la seconda può essere accettata perché $x = 1$ non rientra nell'intervallo delle soluzioni possibili.

- **Esercizio 3**: Risolvere la seguente equazione logaritmica

$$\log_7(x^2 + 6x + 58) = 2.$$

Soluzione

L'argomento del logaritmo deve essere positivo quindi occorre prima impostare la disequazione:

$$x^2 + 6x + 58 > 0$$

Avremo

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 58}}{2} \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-196}}{2}$$

e siccome si ha $\Delta < 0$ e il coefficiente del termine di secondo grado è positivo, segue che l'argomento del logaritmo è sempre positivo, quindi ogni soluzione trovata sarà accettabile. Poiché, per definizione, il logaritmo di un numero è l'esponente che si deve dare alla base per ottenere il numero, si avrà

$$\log_7(x^2+6x+58) = 2 \;\Rightarrow\; x^2+6x+58 = 7^2 \Rightarrow x^2+6x+58 = 49 \Rightarrow x^2+6x+9 = 0$$

quindi avremo

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 9}}{2} \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{2} \;\Rightarrow\; x_1 = x_2 = -3$$

Abbiamo trovato la soluzione $x = -3$.

- **Esercizio 4**: Risolvere la seguente equazione logaritmica

$$\log_7(x^2+6x) - \log_7(x-10) = 2.$$

Soluzione

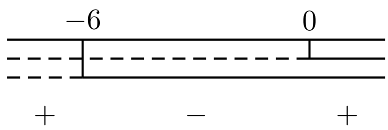
L'argomento dei vari logaritmi deve essere positivo quindi occorre prima impostare il sistema:

$$\begin{cases} x^2+6x > 0 \\ x-10 > 0 \end{cases}$$

Analizziamo la prima disequazione. Avremo

$$x^2+6x > 0 \;\Rightarrow\; x(x+6) > 0 \;\Rightarrow\; \begin{array}{ll} x > 0 & \text{per } x > 0 \\ x+6 > 0 & \text{per } x > -6 \end{array}$$

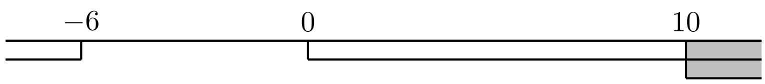
quindi



segue che la prima disequazione è soddisfatta per i valori $x < -6$ e $x > 0$. Analogamente si vede facilmente che la seconda disequazione è soddisfatta per $x > 10$ quindi il sistema diventa

$$\begin{cases} x < -6 \text{ e } x > 0 \\ x > 10 \end{cases}$$

quindi graficamente



Quindi si possono accettare solo le soluzioni maggiori di 10.
Usando la proprietà dei logaritmi:

$$\log_a \frac{c}{d} = \log_a c - \log_a d$$

si trova

$$\log_7(x^2+6x) - \log_7(x-10) = 2 \Rightarrow \log_7 \frac{x^2+6x}{x-10} = 2$$

e poiché, per definizione, il logaritmo di un numero è l'esponente che si deve dare alla base per ottenere il numero, si avrà

$$\frac{x^2+6x}{x-10} = 7^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2+6x}{x-10} = 49 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2+6x-49x+490}{x-10} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2-43x+490}{x-10} = 0$$

quindi

$$x_{1,2} = \frac{43 \pm \sqrt{1849 - 4 \cdot 490}}{2} \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{43 \pm \sqrt{-111}}{2}$$

e siccome si ha $\Delta < 0$ l'equazione non ammette soluzioni.

- **Esercizio 5**: Risolvere la seguente equazione logaritmica

$$\log_{10} \frac{x^2+10x+16}{x-1} = 1.$$

Soluzione

L'argomento del logaritmo deve essere positivo quindi occorre prima impostare la disequazione:

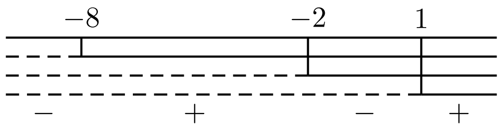
$$\frac{x^2+10x+16}{x-1} > 0$$

Avremo

$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 16}}{2} \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{36}}{2} \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-10 \pm 6}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -8 \\ x_2 = -2. \end{cases}$$

quindi deve essere

$$\frac{(x+8)(x+2)}{x-1} > 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} x+8>0 & \text{per } x > -8 \\ x+2>0 & \text{per } x > -2 \\ x-1>0 & \text{per } x > 1 \end{array}$$



quindi si possono accettare solo i valori appartenenti all'intervallo

$$-8 < x < -2 \qquad \text{e} \qquad x > 1.$$

Calcolato questo si può procedere alla risoluzione dell'equazione logaritmica

$$\log_{10} \frac{x^2 + 10x + 16}{x - 1} = 1.$$

Poiché, per definizione, il logaritmo di un numero è l'esponente che si deve dare alla base per ottenere il numero, si avrà

$$\log_{10} \frac{x^2 + 10x + 16}{x - 1} = 1 \Rightarrow \frac{x^2 + 10x + 16}{x - 1} = 10^1 \Rightarrow \frac{x^2 + 10x + 16 - 10x + 10}{x - 1} = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 26}{x - 1} = 0$$

e siccome

$$x^2 + 26 \neq 0 \qquad \text{per ogni } \ x \text{ reale}$$

l'equazione non ammette soluzioni.

- **Esercizio 6**: Risolvere la seguente equazione logaritmica

$$\log_2 \frac{x^2 - 5x - 6}{x - 3} = 1.$$

Soluzione

L'argomento del logaritmo deve essere positivo quindi occorre prima impostare la disequazione:

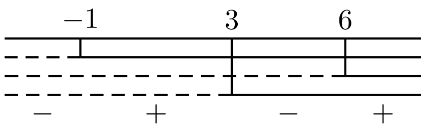
$$\frac{x^2 - 5x - 6}{x - 3} > 0$$

Avremo

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot (-6)}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm 7}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 6. \end{cases}$$

quindi deve essere

$$\frac{(x+1)(x-6)}{x-3} > 0 \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} x + 1 > 0 & \text{per } x > -1 \\ x - 6 > 0 & \text{per } x > 6 \\ x - 3 > 0 & \text{per } x > 3 \end{array}$$



quindi si possono accettare solo i valori appartenenti all'intervallo

$$-1 < x < 3 \qquad \text{e} \qquad x > 6.$$

Calcolato questo si può procedere alla risoluzione dell'equazione logaritmica

$$\log_2 \frac{x^2-5x-6}{x-3} = 1.$$

Poiché, per definizione, il logaritmo di un numero è l'esponente che si deve dare alla base per ottenere il numero, si avrà

$$\log_2 \frac{x^2-5x-6}{x-3} = 1 \;\Rightarrow\; \log_2 \frac{x^2-5x-6}{x-3} = 2^1 \;\Rightarrow\; \frac{x^2-5x-6-2x+6}{x-3} = 0$$
$$\Rightarrow\; \frac{x^2-7x}{x-3} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{x(x-7)}{x-3} = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = 0 \\ x = 7 \end{cases}$$

e siccome entrambi i valori trovati sono interni agli intervalli trovati con la disequazione le soluzioni dell'equazione sono $x = 0$ e $x = 7$.