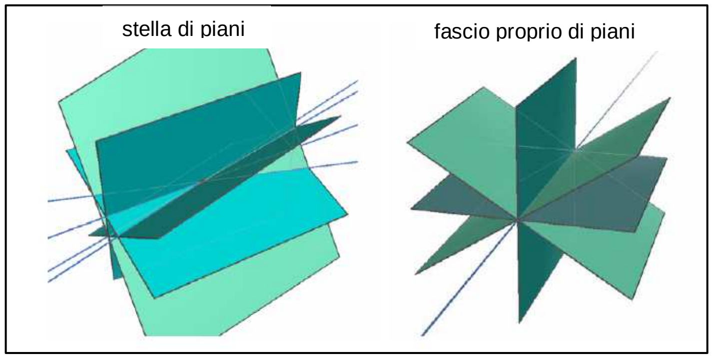
ELEMENTI DI GEOMETRIA DELLO SPAZIO

Lo spazio euclideo è un insieme infinito di elementi detti *punti* e contiene sottoinsiemi propri ed infiniti detti *piani*.
In ogni piano valgono gli assiomi del piano euclideo.
Ogni punto appartiene ad infinite rette dello spazio, l'insieme delle quali si dice *stella di rette*.
Ogni punto appartiene ad infiniti piani: il loro insieme si dice *stella di piani*.
Ogni retta *r* appartiene ad infiniti piani; il loro insieme si dice *fascio proprio di piani*; *r* è detta *asse* del fascio.

ASSIOMI

a) Per tre punti non allineati passa uno ed un solo piano.
b) Se due punti di una retta appartengono a un piano, essa giace interamente sul piano.
c) Se due piani distinti hanno in comune un punto, essi hanno in comune un'intera retta.
d) Ogni piano α divide lo spazio in due insiemi infiniti e disgiunti, detti *semispazi aperti* tali che per ogni coppia di punti P e Q non appartenenti ad α si ha uno solo dei due seguenti casi:
   - se P e Q appartengono allo stesso semispazio allora il segmento PQ non interseca il piano α[1].
   - se P e Q appartengono a semispazi opposti allora il segmento PQ interseca il piano α .



POSIZIONI RECIPROCHE

• retta - retta
Due rette <u>distinte</u> nello spazio possono essere :
- *complanari*: esiste un piano che le contiene. In tal caso possono essere *incidenti o parallele.*
- *sghembe*: non esiste un piano che le contenga entrambe.

• retta – piano
Una retta e un piano nello spazio possono essere :
- *incidenti:* se hanno un solo punto in comune.
- *paralleli:* se non hanno punti in comune, oppure se li hanno tutti.

Se una retta è parallela ad una retta di un piano, essa è parallela al piano.

• piano – piano
Due piani <u>distinti</u> nello spazio possono essere :
- *incidenti* se hanno una retta in comune.
- *paralleli* se non hanno punti in comune. La relazione di parallelismo tra piani, così come quella tra rette, gode della proprietà simmetrica, di quella riflessiva e di quella transitiva; si tratta perciò di una relazione di equivalenza. L'insieme di tutti i piani paralleli ad un piano dato si dice fascio improprio di piani ed individua in modo univoco l'insieme di tutte le rette perpendicolari ad uno di essi (*giacitura* del piano).

Le intersezioni di piani paralleli con un piano incidente sono rette parallele. Per un punto esterno ad un piano si può condurre uno ed un solo piano parallelo al piano dato.
La parte di spazio compresa tra due piani paralleli si dice *strato*.

Teorema di Talete nello spazio
Un fascio di piani paralleli determina su due rette trasversali segmenti corrispondenti direttamente proporzionali[2].

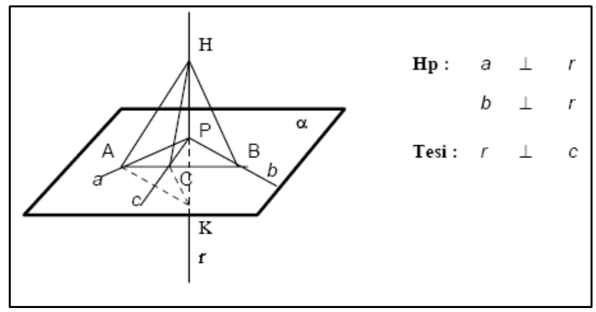
Retta e piano perpendicolari
Per definire il concetto di perpendicolarità tra retta e piano abbiamo bisogno di due premesse (due teoremi) che fanno riferimento all'idea di perpendicolarità di due rette:
Teorema - *Se una retta è perpendicolare a due rette che passano per un suo punto, è pure perpendicolare a tutte le altre rette passanti per quel punto e giacenti nel piano individuato dalle prime due.*

---
[1] Ciò significa in particolare che ogni semispazio è una *figura convessa*. Prova a dimostrarlo ricordando che una figura si dice convessa se per ogni coppia di punti A e B appartenenti alla figura anche il segmento AB appartiene alla figura.
[2] Le due rette trasversali sono, in generale, sghembe tra loro. Se le due rette sono complanari il teorema si riduce al teorema di Talete nel piano.

DIMOSTRAZIONE

Siano *a* e *b* due rette perpendicolari alla retta *r* nel suo punto P e sia α il piano da esse individuato. Sia *c* una qualunque altra retta appartenente al piano α e passante per P.

Si prendano su *r* due punti H e K appartenenti a semispazi opposti rispetto ad α e tali che sia $PH = PK$.



Si prendano, rispettivamente su *a* e su *b*, due punti A e B distinti da P. Essendo *a* l'asse del segmento HK, sarà $AH = AK$ e analogamente $BH = BK$. I triangoli HAB e KAB risultano congruenti per il 3° criterio. Si indichi con C il punto di intersezione della retta AB con la retta *c*. I triangoli HAC e KAC risultano congruenti perché hanno due lati e l'angolo compreso rispettivamente congruenti, quindi, in particolare, $HC = KC$. Il triangolo HCK è perciò isoscele e in esso CP, che è mediana relativa alla base, sarà anche altezza, quindi *r* è perpendicolare a *c*. c.v.d.

Come conseguenza del teorema precedente si dimostra anche il seguente: *Tutte le rette perpendicolari ad una retta data in un suo punto giacciono sullo stesso piano.*

Ora siamo in grado di dare la definizione: una retta ed un piano si dicono *perpendicolari* quando la retta interseca il piano ed è perpendicolare a tutte le rette del piano che passano per il punto di intersezione, detto *piede della perpendicolare*.

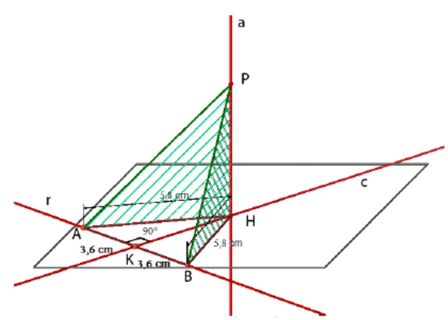
Dati un punto e un piano, esiste una sola retta passante per il punto e perpendicolare al piano.

Dati un punto e una retta, esiste un solo piano passante per il punto e perpendicolare alla retta.

Piani perpendicolari alla stessa retta sono paralleli tra loro. Rette perpendicolari allo stesso piano sono parallele tra loro.

Teorema delle tre perpendicolari* - *Se dal piede di una perpendicolare a ad un piano si conduce la perpendicolare c ad una retta qualunque r del piano, questa (r) risulta perpendicolare al piano (ac) individuato dalle prime due.

DIMOSTRAZIONE



La retta *a* è perpendicolare al piano α. Dal suo piede H si conduca la retta *c* perpendicolare alla retta *r* del piano α e sia K il punto di intersezione. La retta *r* è perpendicolare a *c* per ipotesi, quindi basterà dimostrare che essa è pure perpendicolare a un'altra retta del piano *ac*. A tale scopo si prendano su *r* due punti A e B da bande opposte rispetto a K e tali che $AK = KB$ e si congiungano A e B con H e con un altro punto P della retta *a*. Nel piano α la retta *c* è asse del segmento AB, quindi $AH = HB$. I triangoli rettangoli PHA e PHB sono congruenti perché hanno i cateti corrispondenti congruenti, pertanto $PA = PB$. Ne segue che il triangolo PAB è isoscele e che PK, che è mediana, è anche altezza. La retta *r* è quindi perpendicolare alla retta PK che appartiene al piano *ac* e, per un teorema precedente, si può concludere che *r* è perpendicolare al piano *ac*. c.v.d.

PROIEZIONI

Proiezione di un punto su un piano è il piede della perpendicolare condotta dal punto al piano. La lunghezza del segmento che ha per estremi il punto e la sua proiezione sul piano si dice *distanza del punto dal piano.* Se una retta è parallela ad un piano tutti i suoi punti sono equidistanti dal piano; tale distanza si dice *distanza della retta dal piano.*

Proiezione di una figura[3] su un piano è la figura costituita dalle proiezioni dei suoi punti sul piano.

La proiezione di una retta su un piano non perpendicolare ad essa è una retta.

Teorema - *Se da un punto esterno a un piano si conducono il segmento perpendicolare e diversi segmenti obliqui, si ha:*

- *il segmento perpendicolare è minore di qualunque segmento obliquo,*
- *due segmenti obliqui aventi proiezioni congruenti sono congruenti e viceversa,*
- *due segmenti obliqui aventi proiezioni disuguali sono disuguali nello stesso verso.*

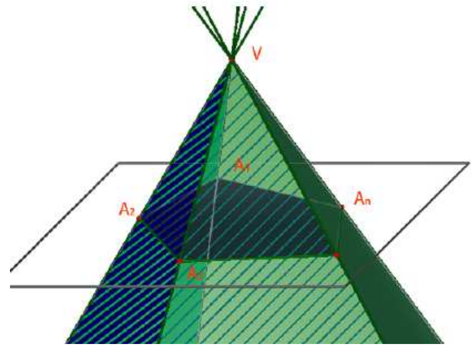
Si chiama *angolo di una retta con un piano* l'angolo acuto che la retta forma con la sua proiezione sul piano.

DIEDRI

[3] Una *figura* è un insieme di punti. Utilizzando questa semplice definizione si accettano anche *figure* molto "strane", come i frattali.

Si definisce ***diedro*** ciascuna delle due parti di spazio delimitate da due semipiani che hanno la stessa origine, compresi i semipiani stessi. I due semipiani prendono il nome di *facce* del diedro e la loro origine comune di *spigolo* del diedro.
Un diedro è convesso se è una figura convessa, concavo se non lo è.
Si dice *sezione normale di un diedro* l'angolo che si ottiene intersecando il diedro con un piano perpendicolare al suo spigolo. Tale definizione è ben posta in quanto si dimostra che: *le sezioni normali di uno stesso diedro sono congruenti.*
Inoltre *diedri congruenti hanno sezioni normali congruenti e viceversa.*
Si dice *ampiezza di un diedro* l'ampiezza della sua sezione normale. In particolare un diedro la cui ampiezza è un angolo retto si dice *diedro retto.* Due *piani* incidenti si dicono *perpendicolari* se formano quattro diedri retti. Se si associa a un diedro la sua sezione normale e viceversa, si ottiene una corrispondenza biunivoca; tale corrispondenza permette la trasposizione ai diedri di tutta la terminologia degli angoli (Es: diedri acuti, diedri
adiacenti, diedri opposti allo spigolo.....)

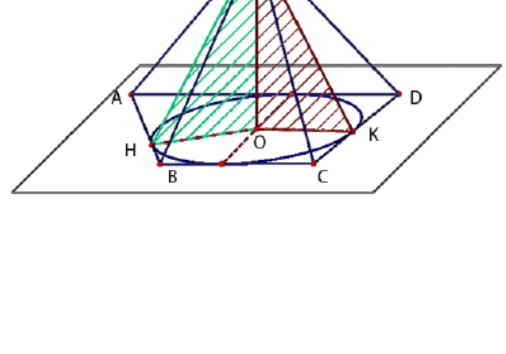
ANGOLOIDI E PIRAMIDI



Dato un poligono <u>convesso</u> $A_1A_2A_3....A_n$ e un punto V non appartenente al piano del poligono, si chiama *superficie piramidale indefinita* la figura formata dagli angoli A_1VA_2 , A_2VA_3 ...., $A_{n-1}VA_n$. Il punto V si chiama *vertice della superficie piramidale*, le semirette VA_1 , VA_2 ,...., VA_n si chiamano *spigoli* e gli angoli A_1VA_2, A_2VA_3, ... si chiamano *facce*.
Si chiama *angoloide* la parte di spazio formata da tutte le semirette che hanno origine in V e che passano per un punto del poligono.
L'ampiezza di ogni faccia di un angoloide è minore delle somma di tutte le altre. La somma delle ampiezze delle facce di un angoloide è minore di un angolo giro.
Si dice *triedro* un angoloide con tre facce.
Criteri di congruenza[4] dei triedri :
1. Due triedri che hanno due facce e il diedro compreso congruenti sono congruenti
2. Due triedri che hanno due diedri e la faccia compresa congruenti sono congruenti
3. Due triedri che hanno le tre facce congruenti sono congruenti
4. Due triedri che hanno i tre diedri congruenti sono congruenti.

Teorema delle sezioni parallele di un angoloide *Le sezioni parallele di un angoloide sono poligoni simili i cui perimetri sono proporzionali alle distanze del vertice dai piani delle sezioni e le aree sono proporzionali ai quadrati delle stesse distanze. Inoltre anticipiamo che i volumi delle due piramidi che hanno i due poligoni per basi sono direttamente proporzionali ai cubi delle distanze dette.*

Si dice *piramide* l'intersezione tra un angoloide di vertice V ed un semispazio che contiene V. V si dice *vertice della piramide*; l'origine del semispazio è il *piano di base* della piramide. Su tale piano l'angoloide determina un poligono (detto *base della piramide*) che delimita la piramide insieme a *n* triangoli, detti *facce* della piramide. Secondo il numero delle facce la piramide si chiama *triangolare*, *quadrangolare*, ecc... L'*altezza* di una piramide è il segmento di perpendicolare condotto dal vertice al piano di base. Una piramide si dice *retta* se ha per base un poligono circoscrittibile ad una circonferenza il cui centro coincide con il piede dell'altezza.
In una piramide retta i segmenti che congiungono il vertice con i punti di tangenza del poligono di base con la circonferenza inscritta sono tutti congruenti e sono le altezze delle facce laterali.
In virtù di questo teorema si può definire l'*apotema* di una piramide retta come l'altezza delle facce laterali.
DIMOSTRAZIONE
Sia VABCD una piramide retta e siano H e K due punti di tangenza del poligono di base con la circonferenza inscritta di centro O. I triangoli rettangoli VOH e VOK sono congruenti per il primo criterio e quindi in particolare VH =VK. Inoltre, essendo VO perpendicolare alla base (perché altezza della piramide) e OH perpendicolare ad AB (perché raggio condotto nel punto di tangenza), per il teorema delle tre perpendicolari sarà AB perpendicolare a VH: pertanto VH è altezza della faccia. Analogamente per le altre facce della piramide retta. c.v.d.



4 Nello spazio il concetto di congruenza non è equivalente a quello di sovrapponibilità: due figure tra loro simmetriche rispetto ad un piano <u>non sono</u>, in generale, sovrapponibili, pur essendo congruenti (pensa alle due mani).

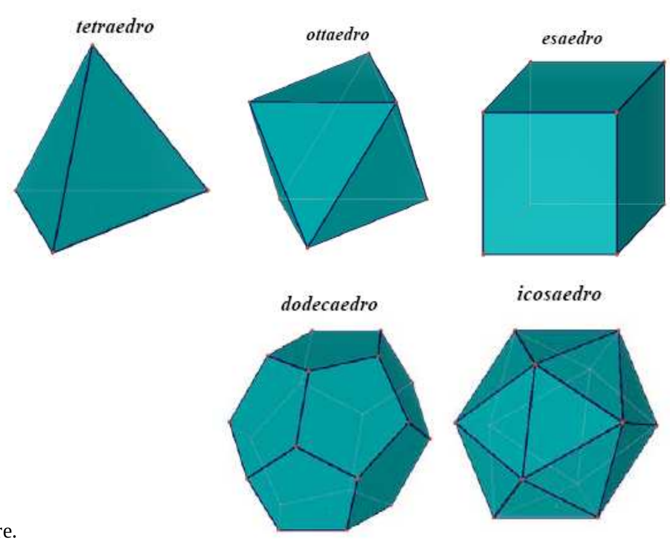
Una *piramide regolare* è una piramide retta che ha per base un poligono regolare.
Sezionando una piramide con un piano parallelo alla base, nel semispazio non contenete il vertice si ottiene un tronco *di piramide*.

PRISMI

Si chiama *prisma indefinito* il solido costituito da tutte le rette parallele tra loro passanti per i punti di un poligono convesso e non appartenenti al piano di questo.
Le rette che passano per i vertici del poligono sono gli *spigoli* del prisma. L'insieme di tutte le rette parallele che passano per un lato del poligono formano una striscia di piano che si dice *faccia del prisma indefinito*.
Se il poligono che genera il prisma ha n lati e quindi n vertici, il prisma risulta delimitato da n diedri. Le sezioni di un prisma indefinito con piani paralleli tra loro sono poligoni congruenti.
Si dice *prisma finito* o semplicemente *prisma* la parte di prisma indefinito compreso tra due piani paralleli distinti (*piani delle basi*). Le sezioni poligonali appartenenti ai piani delle basi sono le basi del prisma.
Le facce laterali di un prisma sono parallelogrammi.
Gli spigoli laterali di un prisma sono congruenti.
Si dice *prisma retto* un prisma in cui gli spigoli sono perpendicolari ai piani delle basi. Le facce laterali di un prisma retto sono rettangoli.
Un prisma si dice *regolare* se è un prisma retto avente per basi poligoni regolari. In tal caso le facce laterali sono rettangoli tutti congruenti tra loro.
Il *parallelepipedo* è un prisma le cui basi sono parallelogrammi (un parallelepipedo è quindi limitato da sei parallelogrammi). *Le facce opposte di un parallelepipedo sono parallele e congruenti. Le diagonali di un parallelepipedo si intersecano in uno stesso punto che risulta essere centro di simmetria del parallelepipedo (quindi, in particolare, le divide a metà).*
Un parallelepipedo è *rettangolo* se è retto ed ha per base un rettangolo (quindi tutte le facce sono rettangoli). Le lunghezze dei tre spigoli uscenti da un vertice di un parallelepipedo rettangolo si chiamano le tre *dimensioni* del parallelepipedo.
Le diagonali di un parallelepipedo rettangolo sono congruenti. Un parallelepipedo rettangolo che ha gli spigoli congruenti si dice *cubo* o *esaedro regolare*.

POLIEDRI

Un *poliedro convesso* è un solido delimitato da poligoni (*facce*) che si saldano lungo i lati (*spigoli*) e tali che il piano di ciascuno di essi non attraversi il solido. I vertici di ciascun poligono sono anche vertici del poliedro. Ogni vertice del poligono è vertice di un angoloide che contiene il poliedro.
Teorema di Eulero Indicati con f, v, s rispettivamente il numero di facce, di vertici e di spigoli di un poliedro, risulta $f + v = s + 2$.
Un *poliedro regolare* è un poliedro in cui tutte le facce sono poligoni regolari e congruenti e in cui tutti gli angoloidi sono pure congruenti. I poliedri regolari sono solo cinque. Essi sono anche chiamati *solidi platonici*. Perché esistono solo cinque poliedri regolari? Ciò dipende dal fatto che la somma delle facce di un angoloide deve essere minore di un angolo giro. Ora, poiché un triangolo equilatero ha gli angoli interni di 60°, saldando lungo i lati dei triangoli equilateri si possono costruire solo angoloidi a tre, quattro o cinque facce[5]. Un angoloide a sei facce avrebbe somma delle facce uguale ad un angolo giro. Analogamente si trova che utilizzando dei quadrati si possono costruire solo angoloidi a tre facce[6]. Infine con pentagoni regolari si può costruire solo un angoloide a tre facce (gli angoli interni di un pentagono misurano 108° e $108 \times 3 < 360$)[7].



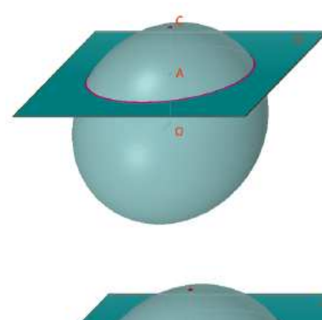
Tutti i poliedri regolari si possono inscrivere e circoscrivere ad una sfera. Il centro della sfera inscritta coincide sempre con quello della sfera circoscritta. Tale punto è centro di simmetria per ciascuno dei poliedri e si dice *centro del poliedro*. Se congiungiamo i centri di tutte le facce di un cubo con i centri delle facce adiacenti si ottiene un ottaedro regolare e viceversa. Congiungendo invece i centri delle facce di un

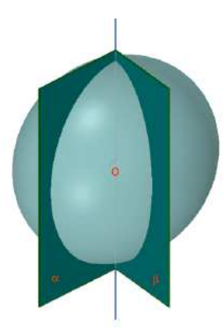
[5] Completando la costruzione del poliedro con altri triangoli equilateri, tutti congruenti tra loro, otterremo rispettivamente il tetraedro regolare, l'ottaedro regolare e l'icosaedro regolare.
[6] Completando il poliedro si ottiene il cubo.
[7] In questo caso completando la costruzione si ottiene il dodecaedro regolare.

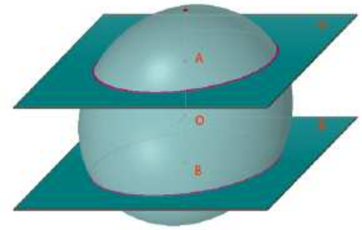
icosaedro regolare con i centri delle facce adiacenti si ottiene un dodecaedro e viceversa. Si dice che icosaedro e dodecaedro sono poliedri *coniugati*. Sono coniugati anche cubo ed ottaedro, mentre il tetraedro è coniugato di se stesso.
Ai poliedri regolari veniva attribuito un carattere “magico”, forse questo spinse Keplero a collegarli con le orbite dei pianeti allora conosciuti.

SOLIDI DI ROTAZIONE

Dato un semipiano α limitato dalla retta *a*, sia *g* una linea qualunque appartenente al semipiano α; ruotando il semipiano α di un angolo giro attorno alla retta *a*, la linea *g* genera una *superficie di rotazione*.
La parte di spazio costituita dalla superficie di rotazione e da tutti i punti ad essa interni si chiama *solido di rotazione*.
La retta *a* si chiama *asse di rotazione* e la linea *g* si chiama *generatrice della superficie di rotazione*.
Ogni punto di *g* descrive una circonferenza; tali circonferenze si chiamano *paralleli* della superficie o sezioni normali, infatti si ottengono anche come sezione della superficie di rotazione fatte con piani normali al suo asse.
Un piano passante per l’asse *a* interseca la superficie di rotazione secondo due generatrici simmetriche rispetto all’asse dette *meridiani*.
Mediante questo procedimento si ottengono: la *superficie cilindrica indefinita* se la generatrice è una retta parallela all’asse di rotazione, *la superficie conica indefinita* se la generatrice è una semiretta avente l’origine sull’asse di rotazione. In quest’ultimo caso l’ampiezza dell’angolo <u>acuto</u> formato dalla generatrice e dall’asse di rotazione è detta *semiapertura del cono*. E’ facile dimostrare che *i raggi dei paralleli di una superficie conica sono direttamente proporzionali alle distanze dal vertice dei piani su cui essi giacciono.*
Infine se la generatrice è una retta incidente e non perpendicolare all’asse di rotazione si ottiene la *superficie conica a due falde*. Le sezioni di una superficie conica a due falde con un piano che non passi per il suo vertice sono curve piane dette *sezioni coniche* o semplicemente *coniche* (parabola, ellisse, iperbole).
Si dice *cilindro retto* la figura compresa tra una superficie cilindrica indefinita e tra due piani perpendicolari all’asse di rotazione. Il cilindro si dice *equilatero* se l’altezza è congruente al diametro di base.
Un prisma retto si dice *inscritto in* (*circoscritto a*) *un cilindro* quando le sue basi sono inscritte nelle (circoscritte alle) basi del cilindro. Un prisma regolare risulta sempre inscrittibile e circoscrittibile ad un cilindro.
Si dice *cono retto* la figura limitata[8] compresa tra una superficie conica indefinita ed un piano perpendicolare al suo asse. Congiungendo il vertice di un cono retto con un punto qualsiasi della circonferenza di base si ottengono segmenti congruenti; ognuno di questi si dice *apotema* del cono. Un cono retto si dice equilatero se l’apotema è congruente al diametro di base.
Una piramide retta si dice *inscritta in* (*circoscritta a*) *un cono* se il suo vertice è il vertice del cono e la sua base è *inscritta nella* (*circoscritta alla*) *base*. Una piramide regolare risulta sempre inscrittibile e circoscrittibile ad un cono.
La *sfera* è il solido ottenuto dalla rotazione completa di un semicerchio attorno al proprio diametro; il centro O e il raggio r del semicerchio sono anche centro e raggio della sfera.
La *superficie sferica* è il luogo dei punti dello spazio equidistanti da un punto detto centro della sfera. Una *circonferenza massima* è l’intersezione di una superficie sferica con un piano passante per il centro della sfera. *Il centro di ogni circonferenza massima coincide con il centro della sfera. Per i due estremi di un qualunque diametro di una sfera passano infinite circonferenze massime.*
Un *diametro* della sfera è un segmento che passa per il centro e che ha gli estremi sulla superficie sferica. *Per due punti di una superficie sferica non allineati con il centro passa una ed una sola circonferenza massima. La linea di minima distanza tra due punti di una superficie sferica è l’arco di circonferenza massima passante per essi (linea geodetica).*
Un piano è rispettivamente *secante*, *tangente* o *esterno* ad una superficie sferica a seconda che abbia in comune con essa una circonferenza, un solo punto o nessun punto.
Si dimostra che: *le semirette che hanno origine in un punto V esterno ad una sfera e che sono tangenti ad essa formano una superficie conica indefinita. Le rette parallele ad una retta data che sono tangenti ad una sfera formano una superficie cilindrica indefinita.*
Un piano α secante una superficie sferica la divide in due parti, ciascuna delle quali si chiama *calotta sferica***.**
Un piano secante una sfera la divide in due parti, ciascuna delle quali si chiama *segmento sferico ad una base*. L’*altezza* di un segmento sferico ad una base o di una calotta sferica è la parte del







[8] Una figura solida si dice *limitata* se esiste una sfera che la contiene.

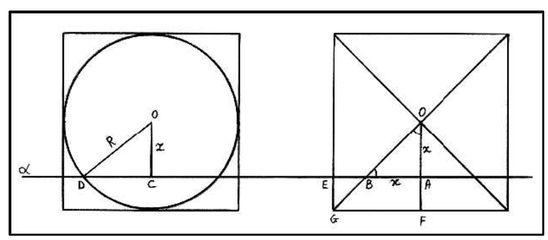
diametro perpendicolare al piano secante, compresa tra tale piano e la calotta (in figura AC rappresenta una delle due altezze)
Si chiama *settore sferico* la parte di sfera limitata da una calotta sferica e dal cono che ha per vertice il centro O della sfera e per base quella della calotta.
Consideriamo due piani paralleli α e β entrambi secanti una sfera. La parte di superficie sferica compresa tra essi si chiama *zona sferica*, mentre la parte di sfera compresa tra essi si chiama *segmento sferico a due basi.*
Consideriamo due semipiani α e β aventi per origine comune la retta di un diametro. La parte di superficie sferica compresa tra essi si chiama *fuso sferico.* Il diedro formato dai due semipiani si chiama *angolo del fuso.*
La parte di sfera compresa tra i due semipiani si chiama *spicchio sferico.*
I fusi (e gli spicchi) di uguale raggio sono direttamente proporzionali ai corrispondenti angoli diedri.

MISURA DI SUPERFICI

La superficie di un solido si dice *sviluppabile* se, mediante un numero finito di tagli, si può distendere completamente su un piano senza deformarla. I poliedri, i cilindri, i coni e le loro parti hanno superfici sviluppabili, quindi la misura delle loro superfici si riconduce a un problema di geometria piana.
Né la sfera né alcuna sua parte sono sviluppabili, quindi non si può fare riferimento a figure piane per misurarne la superficie. La misura della superficie sferica si può calcolare come limite della superficie di un poliedro inscritto (o circoscritto) nella sfera quando il numero delle facce tende all'infinito.

MISURA DI VOLUMI

Due solidi si dicono *equivalenti* quando hanno la stessa estensione spaziale o semplicemente lo stesso volume. *L'equivalenza tra solidi gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva. Solidi equiscomponibili sono equivalenti, ma non viceversa.*
Per calcolare i volumi è utile il seguente principio:
Principio di Cavalieri[9] **-** *Se due solidi si possono disporre rispetto a un piano dato in modo che le loro sezioni con un piano parallelo a quello dato siano equivalenti, allora i due solidi sono equivalenti.*
Volume della sfera
Data una sfera di centro O, si consideri il cilindro equilatero ad essa circoscritto ed i due coni aventi vertice in O e le basi coincidenti con quelle del cilindro. Il solido che si ottiene dal cilindro togliendo i due coni è detto *anticlessidra*.
Teorema La sfera è equivalente all'anticlessidra corrispondente.
DIMOSTRAZIONE
Consideriamo due sezioni del cilindro equilatero in cui è inscritta una sfera. Sia x = OC la distanza dal centro della sfera del piano α che seca la sfera ed il cilindro parallelamente alle basi di questo. Allora l'area del cerchio di centro C e raggio CD è $A_1 = \pi\ CD^2 = \pi\ (R^2 - x^2)$, dove R è il raggio della sfera (uguale al raggio del cilindro circoscritto). Inoltre risulta R = OF = GF, quindi x = OA = BA (in quanto OGF è simile ad OAB). L'area del cerchio di centro A e raggio AB = x è quindi $A_2 = \pi\ x^2$; l'area del cerchio di centro A e raggio AE = R è banalmente $A_3 = \pi\ R^2$, quindi per ogni x risulta $A_1 = A_3 - A_2$. In base al principio di Cavalieri, la sfera risulta quindi equivalente all'anticlessidra, il cui volume si ottiene semplicemente sottraendo dal volume del cilindro il volume dei due coni: $V = V_{cil} - 2V_{cono} = 2\pi\ R^3 - 2/3\ \pi\ R^3 = 4/3\ \pi\ R^3$.



[9] Bonaventura Cavalieri, discepolo di Galileo, pubblicò nel 1635 la sintesi dei suoi studi sulla teoria degli "indivisibili" (costituenti elementari delle figure) nel trattato *"Geometria indivisibilibus continuorum quadam nova ratione promota"* (Geometria con l'uso degli indivisibili sostenuta da una nuova teoria dei continui). In questo importante trattato Cavalieri concepì i solidi come formati da un numero molto grande di sottilissimi strati sovrapposti, cioè un "continuo" di superfici piane di spessore infinitesimo: questa geniale idea costituisce la base concettuale del calcolo integrale.

FORMULARIO

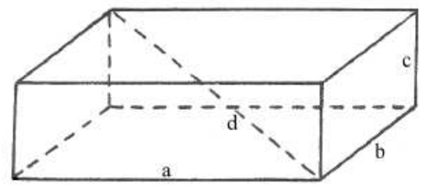
Legenda:

A_L = area laterale; A_B = area di base; A_T = area totale; P_B = perimetro di base; h = altezza;
V = volume.

Parallelepipedo rettangolo

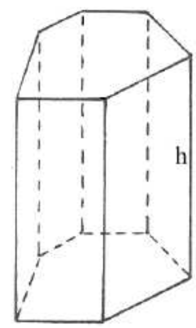
$$A_L = 2(a+b)c$$
$$A_T = A_L + 2ab$$
$$V = abc$$
$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

d = diagonale



Prisma retto

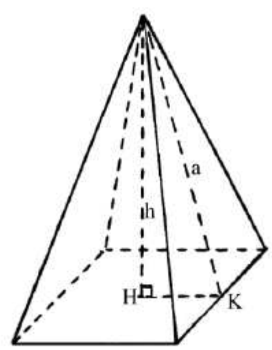
$$A_L = P_B h$$
$$A_T = A_L + 2A_B$$
$$V = A_B h$$



Piramide retta

$$A_L = P_B a/2$$
$$A_T = A_L + A_B$$
$$V = A_B h/3$$

a = apotema



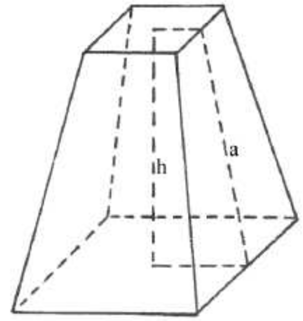
Tronco di piramide retto

$$A_L = (P_B + P_b)a/2$$
$$A_T = A_L + A_B + A_b$$
$$V = \left(A_B + A_b + \sqrt{A_B A_b}\right)h/3$$

a apotema

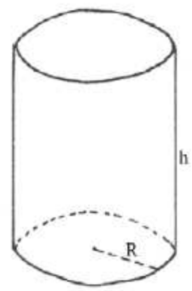
A_B, P_B area e perimetro della base inferiore

A_b, P_b area e perimetro della base superiore



Cilindro circolare retto

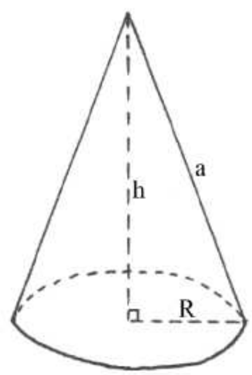
$$A_L = 2\pi Rh$$
$$A_T = A_L + 2\pi R^2$$
$$V = \pi R^2 h$$



Cono circolare retto

$$A_L = \pi Ra$$
$$A_T = A_L + \pi R^2$$
$$V = \pi R^2 h/3$$

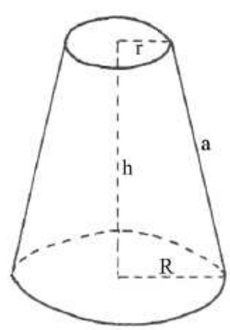
a = apotema



Tronco di cono

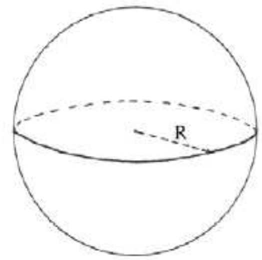
$$A_L = \pi(R + r)a$$
$$A_T = A_L + \pi R^2 + \pi r^2$$
$$V = \pi\left(R^2 + r^2 + Rr\right)h/3$$

a = apotema



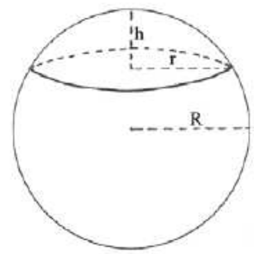
Sfera

$$A = 4\pi R^2$$
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$



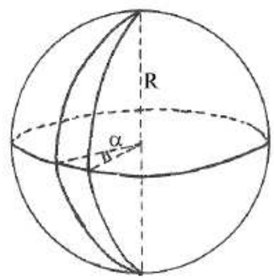
Calotta sferica e segmento sferico a una base

$$A = 2\pi Rh$$
$$V = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h)$$



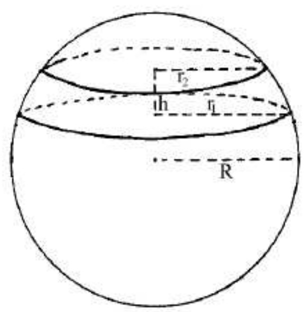
Fuso sferico e spicchio sferico

$$A = \pi R^2 \frac{\alpha°}{90}$$
$$V = \frac{1}{3}RA$$



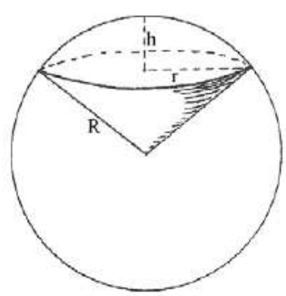
Zona sferica e segmento sferico a due basi

$$A_L = 2\pi Rh$$
$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi h(r_1^2 + r_2^2)$$



Settore sferico

$$A = \pi R(2h + r)$$
$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$$



ESERCIZI

Se dal piede di una retta a perpendicolare ad un piano a si conduce la perpendicolare c ad una qualsiasi retta r del piano a

- quest'ultima è perpendicolare al piano individuato dalle rette a e c
- c è perpendicolare al piano a
- c è perpendicolare al piano individuato da a ed r
- r è perpendicolare ad a

Se da un punto esterno ad un piano si conduce il segmento di perpendicolare e diversi segmenti obliqui, quali tra le seguenti proprietà sono false?

- il segmento di perpendicolare è minore di qualunque segmento obliquo
- il segmento di perpendicolare è maggiore di qualunque segmento obliquo
- due segmenti obliqui aventi proiezioni congruenti sono congruenti
- tra due segmenti obliqui, aventi proiezioni diseguali, è maggiore quello che ha proiezione minore

Stabilisci il valore di verità delle seguenti proposizioni giustificando le tue risposte

- tre rette fra loro parallele appartengono allo stesso piano
- sia a un piano passante per r e sia b un piano passante per una retta s e sia r // s, allora a è sempre parallelo a b
- i due piani a e b della proposizione precedente o sono paralleli o si intersecano lungo una retta parallela a r e a s

Siano tre piani α, β, γ fra loro paralleli distanti rispettivamente 8 cm e 12 cm uno dall'altro; sia poi r una retta incidente i tre piani nei punti A, B, C. Se AB=16 cm, quanto misura BC?

- BC = 14 cm
- BC = 24 cm
- BC = 34 cm
- BC = 44 cm

Riferendosi all'esercizio precedente, quanto misura l'angolo tra r e la giacitura dei tre piani?

- 30°
- 45°
- 60°
- 90°

Un segmento AB misura 20 cm mentre la sua proiezione ortogonale su un piano γ ne misura 10 cm. Quanto misura l'angolo tra AB e γ?

- 30°
- 45°
- 60°
- 90°

Il luogo dei punti equidistanti dalle facce di un diedro è:

- una retta che interseca lo spigolo
- una retta parallela allo spigolo
- un piano parallelo allo spigolo
- un semipiano che lo divide in due diedri congruenti

Se due diedri sono opposti allo spigolo allora

- sono supplementari
- sono consecutivi
- sono congruenti
- sono adiacenti

Vero o falso?

- Un diedro si dice concavo se è maggiore di un diedro retto
- Due sezioni parallele di un diedro sono necessariamente due sezioni normali
- La somma di due diedri adiacenti è un diedro piatto
- La somma di due diedri consecutivi è un diedro piatto
- Due diedri sono complementari se la loro somma è un diedro piatto

Le sezioni di un angoloide con due piani paralleli non passanti per il vertice sono:

- due poligoni congruenti
- due poligoni simili con rapporto di similitudine pari alla distanza tra i due piani
- due poligoni regolari con numero di lati pari al numero delle facce dell' angoloide
- due poligoni simili con rapporto di similitudine pari al rapporto tra le distanze dei due piani dal vertice

L'intersezione di un angoloide con un piano è:

- una spezzata aperta
- una spezzata chiusa
- un poligono solo se il piano non passa per il vertice dell'angoloide
- un poligono solo se il piano non passa per il vertice dell'angoloide e ne taglia tutti gli spigoli

Vero o falso?

- Un angoloide ha tante facce quanti spigoli
- Due triedri sono congruenti se hanno congruenti due diedri e una faccia
- La somma di due facce di un diedro è maggiore della terza faccia
- Le sezioni piane di un angoloide sono tutte simili tra loro