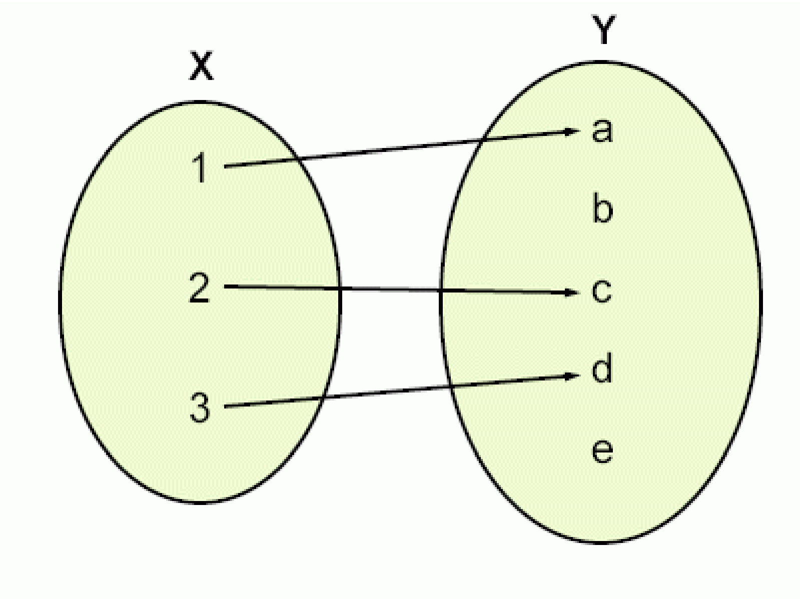
Funzioni

In matematica, una **funzione** *f* da *X* in *Y* consiste in:

1. un insieme *X* detto **dominio** di *f*
2. un insieme *Y* detto **codominio** di *f*
3. una **legge** che ad ogni elemento *x* in *X* associa uno ed un solo elemento *y* in *Y*. Tale elemento è indicato con *f*(*x*).



Si dice che *x* è l'**argomento** della funzione, oppure un valore della **variabile indipendente**, mentre *y* o *f*(*x*) è un valore della **variabile dipendente** della funzione. Sinonimo meno comune di "funzione" è "applicazione"; in ambito geometrico si usano i sinonimi "trasformazione" e "mappa"; quando si trattano spazi vettoriali si usa talvolta il sinonimo "operatore".

Le funzioni hanno un ruolo importante in tutte le scienze esatte. Il concetto di *dipendenza funzionale* tra due grandezze sostituisce infatti, all'interno delle teorie fisiche e matematiche, quello di causa-effetto, che al contrario del precedente non riguarda gli enti teorici ma direttamente gli elementi della realtà concreta. Se si afferma, ad esempio, che la pressione di una certa quantità di gas perfetto è funzione della sua temperatura e del suo volume si sta facendo un'affermazione interna ad un modello termodinamico, mentre il rapporto di causa-effetto che viene individuato fra le tre grandezze dipende in modo sostanziale dalle possibilità di intervento concreto su di esse. Rimanendo a questo esempio, poiché è generalmente molto più facile intervenire sul volume e sulla temperatura che direttamente sulla pressione, il valore di quest'ultima viene visto più spesso come *conseguenza* del valore degli altri due parametri.

Esempi

Gli esempi più semplici di funzione sono quelli per cui sia il dominio che il codominio sono insiemi numerici. Per esempio, se a ogni numero naturale associo il doppio di tale numero, ho una funzione, il cui dominio è dato appunto dai naturali, mentre il cui codominio è costituito dai naturali pari.
Tuttavia, si parla di funzione anche quando il dominio o il codominio o entrambi non sono insiemi di numeri. Per esempio, se a ogni triangolo del piano associo il cerchio in esso inscritto, oppure una funzione, in quanto per ogni triangolo esiste uno e un solo cerchio inscritto.
Inoltre spesso si parla di funzioni con più argomenti, o con più valori, per esempio la funzione che alle coordinate x, y, z di un punto nello spazio fa corrispondere temperatura T e pressione P dell'aria. In tal caso, la funzione ha in realtà sempre un solo argomento, che è la terna (x, y, z), e ha sempre un solo valore, che è la coppia

Definizione formale

Dati gli insiemi *X* e *Y* non vuoti, si chiama **funzione** da *X* in *Y* un sottoinsieme *f* tale che per ogni $x \in X$, esiste uno ed un solo elemento $y \in Y$ tale che $(x, y) \in f$. Tale elemento tradizionalmente si denota con *f*(*x*): in altre parole, invece di scrivere $(x, y) \in f$ possiamo usare la *scrittura tradizionale* $y = f(x)$.
Il fatto che *f* è una funzione da *X* in *Y* che associa a *x* l'elemento *f*(*x*) si può esprimere con la scrittura:

$$\begin{aligned} f:\ X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

L'insieme *X* (da cui la funzione *f* "prende" i valori) è il **dominio** della funzione *f*, mentre l'insieme *Y* (in cui si trovano i valori "restituiti" dalla funzione *f*) è il **codominio** della funzione *f*.
Osserviamo che i termini metaforici "prendere un valore" e "restituire un valore" fanno riferimento ad un modello meccanico delle funzioni, rappresentate come meccanismi che, fornito loro un elemento del dominio, lo *trasformano* nel corrispondente elemento del codominio..

SUCCESSIONE

In matematica, una **successione** può essere definita intuitivamente come un elenco ordinato costituito da un numero infinito di oggetti, detti **termini** della successione, tra i quali sia possibile distinguere un primo, un secondo, un terzo e in generale un *n*-esimo termine per ogni intero *n*.
A differenza di quanto avviene per gli insiemi, per una successione è rilevante l'ordine in cui gli oggetti si trovano, e uno stesso oggetto può comparire più volte. Tali caratteristiche sono le stesse che distinguono una *n*-upla ordinata da un insieme costituito da *n* elementi, per cui una successione può anche essere considerata l'estensione infinita di una *n*-upla ordinata.
Poiché i termini di una successione sono infiniti, essi non possono mai essere scritti tutti in modo esplicito. Di conseguenza per rappresentare una successione ci si limita a scrivere alcuni termini seguiti da puntini di sospensione e dall'indicazione del termine generico, così:
$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$
Normalmente si rende necessario delimitare i termini di una successione, e lo si fa per mezzo di parentesi. Dal momento che nel caso finito la differenza fra una *n*-pla ordinata e un insieme viene evidenziata usando per la *n*-pla le parentesi tonde (o acute) e per l'insieme le parentesi graffe, anche nel caso infinito potrebbe essere utile usare le parentesi tonde (o acute) per delimitare una successione. Tale consuetudine tuttavia non si è ancora imposta, e seguendo la tradizione spesso si delimitano anche le successioni con le parentesi graffe, per cui si trovano entrambe le notazioni:
$\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots\}$ oppure $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots)$
le quali si possono rendere in modo più sintetico indicando il solo termine generico a_n e l'insieme in cui varia *n*: $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$o $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
D'altra parte il termine generico di una successione non può che essere indicato per mezzo di una espressione che dipende da *n*, oppure che dipende da alcuni termini precedenti della successione. Ad esempio la successione dei numeri pari si scrive così:
$0, 2, 4, \cdots, 2n, \cdots := (2n)_{n\in\mathbb{N}}$
mentre la successione i cui termini dal terzo in poi si ottengno sommando i due precedenti (detta successione di Fibonacci) si scrive così:
$0, 1, \cdots, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \cdots$

In questo modo si ottengono tutte le informazioni necessarie a calcolare anche tutti gli altri termini della successione. Infatti:

- se l' n-mo termine a_n è espresso in dipendenza di n, quella dipendenza definisce direttamente una funzione che al generico intero n associa il termine n-mo;
- se invece l' n-mo termine a_n è espresso in dipendenza di alcuni termini precendenti della successione, e se sono dati i valori di un numero sufficiente di termini iniziali, allora la funzione che associa a_n a n resta definita implicitamente in modo ricorsivo.

Comunque sia, per definire in modo esauriente una successione occorre poter determinare a_n per ogni n, sicché in definitiva bisogna disporre - in qualche modo - di tutte le informazioni necessarie a definire in modo univoco una funzione f tale che $a_n = f(n)$. E poiché ad ogni successione di termini resta associata una e una sola funzione siffatta, si può anche identificare la successione con la funzione stessa. Questo è effettivamente ciò che si fa nella definizione formale, per cui il termine 'successione' può riferirsi sia alla successione dei termini sia alla funzione che genera la successione dei termini.

Definizione formale

Formalmente, una successione di elementi di un dato insieme A è un'applicazione dall'insieme **N** dei numeri naturali in A:

$$f : \mathbb{N} \to A$$

L'elemento a_n della successione è quindi l'immagine

$a_n = f(n)$

del numero n secondo la funzione f. L'insieme A può essere ad esempio l'insieme dei numeri reali.

A seconda di come sia definito il codominio A, le successioni possono essere costituite da semplici numeri reali o complessi, le ***successioni numeriche***; ma anche da funzioni e in questo caso si parla di ***successione di funzioni***.

In matematica il concetto di **successione** è uno di quei concetti fondamentali che, come anche quello di insieme e di funzione, sembrano facilmente acquisibili a livello intuitivo, e allo stesso tempo dimostrano di essere difficilmente riconducibili ad altri concetti, sicché quando non li voglia cosiderare noti e acquisiti intuitivamente ci si trova a dover affrontare complicati e profondi problemi teorici.

Non è difficile illustrare intuitivamente il concetto di successione. Per farlo è necessario prendere le mosse proprio dal linguaggio comune, nel quale il termine **successione** o

quello equivalente di **sequenza** vengono utilizzati per riferirsi ad un **elenco ordinato** di un certo insieme di oggetti, cioè un elenco nel quale sia possibile distinguere un "primo" oggetto, da un "secondo", da un "terzo", eccetera.
Dal momento che si sta facendo riferimento al linguaggio comune, questa successione (o sequenza), intesa come elenco ordinato di oggetti, in generale sarà concepita come costituita da un numero finito di oggetti, sicché a livello intuitivo si partirà dalla acquisizione del concetto di **successione finita**. Solo in un secondo momento - preso atto che una successione può essere prolungata a piacere aggiungendo altri oggetti a quelli già disposti in ordine - si perverrà al concetto di **successione infinita**, che è quella presa in considerazione dalla teoria matematica.
Si osservi che in un elenco ordinato gli oggetti possono essere ripetuti. Ad esempio se si lancia un dado e si scrive la successione dei numeri che escono, si otterrà qualcosa del genere:
(3, 1, 1, 2, 5, 6, 6, 3, 1, 4 , 2 ...)
nella quale si ripetono indefinitamente solo i numeri fra 1 e 6.
Questo semplice esempio mostra chiaramente la differenza fra il concetto di successione e quello di insieme. Infatti il concetto di insieme non contempla in alcun modo la nozione di ordine né la presenza di elementi ripetuti (l'insieme costituito da Romeo e Giulietta è lo stesso insieme costituito da Giulietta e Romeo, e l'insieme costituito da Romeo e Romeo è il solo Romeo), per cui l'insieme dei risultati ottenuti lanciando il dado è composto di soli sei elementi
{1, 2, 3, 4, 5, 6}
e tale rimane anche quando si continui a lanciare il dado indefinitamente, prolungando indefinitamente la successione dei numeri usciti.