# 2. Equazioni goniometriche

## Definizione

**Si chiama *equazione goniometrica* ogni equazione che contenga funzioni goniometriche di uno o più angoli incogniti.**

*Ad esempio*

Sono equazioni goniometriche:

(1) $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$; $\quad \operatorname{sen} x - \cos 2x = 1$; $\quad \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{tg} x$; $\quad \ldots$

$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y$; $\quad \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} + \cos 2y = \operatorname{tg}(x-y)$; $\quad \ldots$

(2) $\operatorname{sen} x \cos x = x$; $\quad x + \operatorname{sen} 2x = 0$; $\quad \operatorname{tg} x - \sqrt{x} = 0$; $\quad \ldots$

Le equazioni del tipo (2) *non si possono risolvere con metodi elementari* e, nei casi più semplici, possono essere risolte solo in modo approssimato o ricorrendo a metodi grafici.

Pertanto, ci limitiamo a considerare equazioni analoghe a quelle del tipo (1), in cui l'incognita risulta solo come argomento di funzioni goniometriche.

## Equazioni goniometriche elementari

CASO 1 $\boxed{\operatorname{sen} x = b}$

Deve essere: $-1 \leq b \leq 1$, ossia $|b| \leq 1$.

In questo caso, sappiamo (Unità 1, par. 9) che esistono due angoli orientati $\alpha$ e $\pi - \alpha$, *supplementari* tra loro e minori di un angolo giro, il cui seno è $b$ (fig. 3.1).

Inoltre, sono soluzioni dell'equazione anche tutti gli angoli che si ottengono da questi aggiungendovi multipli di un angolo giro.

Pertanto, le misure di tutti gli angoli che verificano l'equazione $\operatorname{sen} x = b$ sono:

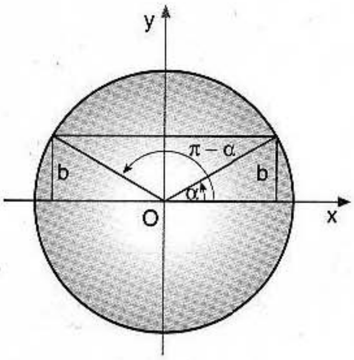


**Figura 3.1**

*in radianti*

$$\boxed{\begin{array}{l} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{array}}$$

*in gradi*

$$\boxed{\begin{array}{l} x = \alpha + k\,360° \\ x = 180° - \alpha + k\,360° \end{array}}$$

$(k \in \mathbb{Z})$.

In particolare:

- se $b = 1$: $\quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$;
- se $b = -1$: $\quad x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$.

*Ad esempio*

- $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Poiché il più piccolo angolo positivo il cui seno sia $\frac{\sqrt{2}}{2}$ è $\frac{\pi}{4}$, si ha (ricordando che il seno è positivo nel I e II quadrante):

$$x = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

- $\operatorname{sen} x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

  Poiché il più piccolo angolo positivo il cui seno sia $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ è $\dfrac{5\pi}{4}$, si ha (ricordando che il seno è negativo nel III e IV quadrante):

$$x = \begin{cases} \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi \\ \pi - \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

- $\operatorname{sen} 3x = \dfrac{1}{2}$.

  Poiché il più piccolo angolo positivo il cui seno sia $\dfrac{1}{2}$ è $\dfrac{\pi}{6}$, si ha:

$$3x = \begin{cases} \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \pi - \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi = \dfrac{5}{6}\pi + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{2}{3}k\pi \\ \dfrac{5}{18}\pi + \dfrac{2}{3}k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

CASO 2 $\boxed{\cos x = a}$

Deve essere: $-1 \leq a \leq 1$, ossia $|a| \leq 1$.

In questo caso, sappiamo (Unità 1, par. 9) che esistono due angoli orientati $\alpha$ e $-\alpha$, *opposti* tra loro e minori di un angolo giro, il cui coseno è $a$ (figura 3.2).

Inoltre, sono soluzioni dell'equazione anche tutti gli angoli che si ottengono da questi aggiungendovi multipli di un angolo giro.

Pertanto, le misure di tutti gli angoli che verificano l'equazione $\cos x = a$ sono:

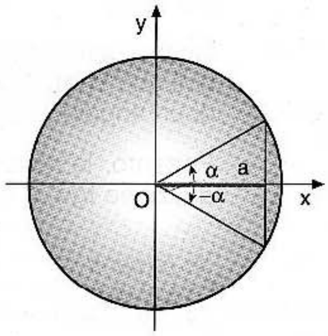


**Figura 3.2**

| *in radianti* | *in gradi* | |
|---|---|---|
| $\boxed{x = \pm\alpha + 2k\pi}$ | $\boxed{x = \pm\alpha + k\, 360°}$ | $(k \in \mathbb{Z})$. |

In particolare, se:

- $\boxed{a = 1}$ $\quad\Rightarrow\quad x = 2k\pi$
- $\boxed{a = -1}$ $\quad\Rightarrow\quad x = (2k + 1)\pi$. $\quad 2k\pi + \pi$

*Ad esempio*

- $\cos x = \dfrac{1}{2}$.

  Poiché il più piccolo angolo positivo il cui coseno sia $\dfrac{1}{2}$ è $\dfrac{\pi}{3}$, si ha (ricordando che il coseno è positivo nel I e IV quadrante):

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

.

- $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

  Poiché il più piccolo angolo positivo il cui coseno sia $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ è $\frac{5\pi}{6}$, si ha:

$$x = \pm\frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

- $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

  Poiché il più piccolo angolo positivo il cui coseno sia $\frac{\sqrt{2}}{2}$ è $\frac{\pi}{4}$, si ha:

$$2x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{8} + k\pi, \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

CASO 3 $\boxed{\operatorname{tg} x = c}$

Il numero $c$ può essere un **numero reale qualunque**.

Sappiamo (Unità 1, par. 9) che esiste un angolo orientato $\alpha$, minore di un angolo piatto, la cui tangente è $c$ (fig. 3.3).

Inoltre, sono soluzioni dell'equazione anche tutti gli angoli che si ottengono da questo aggiungendovi multipli di un angolo piatto.

Pertanto, le misure di tutti gli angoli che verificano l'equazione $\operatorname{tg} x = c$ sono:

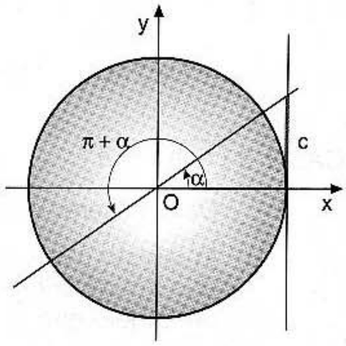


**Figura 3.3**

*in radianti* $\boxed{x = \alpha + k\pi}$ *in gradi* $\boxed{x = \alpha + k\,180°}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Si procede in modo analogo anche per risolvere l'equazione $\operatorname{ctg} x = d$, con $d \in \mathbb{R}$.

*Ad esempio*

- $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

  Poiché il più piccolo angolo positivo la cui tangente sia $\frac{\sqrt{3}}{3}$ è $\frac{\pi}{6}$, si ha:

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi, \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

- $\operatorname{tg} \frac{3}{2}x = -\sqrt{3}$.

  Poiché il più piccolo angolo positivo la cui tangente sia $-\sqrt{3}$ è $\frac{2}{3}\pi$, si ha:

$$\frac{3}{2}x = \frac{2}{3}\pi + k\pi \Rightarrow x = \frac{4}{9}\pi + \frac{2}{3}k\pi, \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

## Equazioni riconducibili ad equazioni elementari

Si tratta di equazioni dei seguenti tipi, dove $\alpha$ e $\beta$ sono espressioni contenenti l'incognita $x$:

1 $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta$, da cui: $\begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \alpha = \pi - \beta + 2k\pi, \end{cases}$ .....

2 $\cos\alpha = \cos\beta$, da cui: $\alpha = \pm\beta + 2k\pi$, .....

3 $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$, da cui: $\alpha = \beta + k\pi$, .....

4 $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta$, da cui: $\alpha = \beta + k\pi$, .....

*Ad esempio*

*Risolvere le seguenti equazioni.*

- $\operatorname{sen} 5x = \operatorname{sen}(4x + 10°)$.

  Si ha:

$$5x = \begin{cases} 4x + 10° + k\,360° & \Rightarrow x = 10° + k\,360° \\ 180° - 4x - 10° + k\,360° & \Rightarrow 9x = 170° + k\,360° \Rightarrow x = \dfrac{170°}{9} + k\,40°. \end{cases}$$

- $\cos 2x = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

  Si ha:

$$2x = \pm\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi = \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ 3x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{9} + \dfrac{2}{3}k\pi. \end{cases}$$

- $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = \operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{5}\right)$.

  Si ha:

$$\frac{x}{2} = x - \frac{\pi}{5} + k\pi \Rightarrow -\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{5} + k\pi \Rightarrow x = \frac{2\pi}{5} + 2k\pi$$ [1].

## Esempi

*Risolvere le seguenti equazioni.*

**1** $\boxed{\operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} x}$

L'equazione si può scrivere:

$$\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x(\operatorname{sen} x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \\ \operatorname{sen} x = 1. \end{cases}$$

La prima ha le soluzioni: $x = k\pi$; la seconda ha le soluzioni $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

Le une e le altre, prese insieme, forniscono tutte e sole le soluzioni dell'equazione data.

**2** $\boxed{2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0}$

Assumendo $\cos x$ come incognita ausiliaria, questa equazione è di 2° grado rispetto a tale incognita. Risolvendola, si ha:

$$\cos x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Gli argomenti che soddisfano l'equazione proposta sono quelli per cui si ha:

$$\cos x = 1, \qquad \text{oppure} \qquad \cos x = \frac{1}{2}.$$

Si ottiene dunque:

- $\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$;
- $\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

**3** $\boxed{2\operatorname{sen}^3 x - 7\operatorname{sen}^2 x + 7\operatorname{sen} x - 2 = 0}$

Posto $\operatorname{sen} x = t$, l'equazione data diventa:

$$2t^3 - 7t^2 + 7t - 2 = 0,$$

che è un'equazione reciproca di 3° grado di seconda specie.

Una delle radici è $t_1 = 1$ e le altre due sono:

$$t_2 = \frac{1}{2}, \qquad t_3 = 2.$$

La radice $t_3$ va scartata poiché risulta maggiore di 1. Si hanno così le due equazioni:

$$\operatorname{sen} x = 1, \qquad \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}.$$

Le soluzioni della prima sono:

(5) $$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi;$$

e quelle della seconda:

(6) $$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \qquad x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Le soluzioni dell'equazione data sono dunque rappresentate dalla (5) e dalle (6).