3. Equazioni lineari in sen x e cos x

Definizione

Si chiama *equazione goniometrica lineare* in sen x **e** cos x **un'equazione del tipo:**

$$a \operatorname{sen} x + b \cos x = c, \tag{1}$$

con a, b **e** c **numeri assegnati.**

Supporremo $a \neq 0$ e $b \neq 0$, poiché, per $a = 0$ e $b \neq 0$, oppure per $a \neq 0$ e $b = 0$, la (1) si riduce ad un'equazione elementare (paragrafo 2).
Le equazioni lineari si possono risolvere con diversi metodi.

Utilizzo delle formule parametriche

Ricordiamo le formule:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \text{in cui } t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \tag{2}$$

che sono valide per $x \neq (2k+1)\pi$.
Sostituendo le (2) nella (1), si ha:

$$a\frac{2t}{1+t^2} + b\frac{1-t^2}{1+t^2} = c \Rightarrow (b+c)t^2 - 2at + (c-b) = 0, \tag{3}$$

che, per $b \neq -c$, è un'equazione algebrica di 2° grado nell'incognita $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.
Risolvendo l'equazione (3) e supponendo che abbia le soluzioni reali t_1 e t_2, è sufficiente poi risolvere le equazioni elementari:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t_1 \quad \text{e} \quad \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t_2.$$

Se invece risulta $b = -c$, allora l'equazione (3) diventa di 1° grado in t.
In questo caso, si perde la soluzione[1]:

$$x = (2k+1)\pi,$$

e quindi bisogna aggiungerla alla soluzione trovata.

Esempi

Risolvere le seguenti equazioni.

1 $\boxed{\operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos x = 2}$

Utilizzando le formule parametriche (2), l'equazione diventa:

$$\frac{2t}{1+t^2} + \sqrt{3}\frac{1-t^2}{1+t^2} = 2 \Rightarrow 2t + \sqrt{3} - \sqrt{3}t^2 = 2 + t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2+\sqrt{3})t^2 - 2t + 2 - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{1-1}}{2+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}.$$

[1] Si ricordi infatti che, per questi valori di x, le formule parametriche perdono significato.

Quindi:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 2-\sqrt{3} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{12} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Si osservi che, per $x = (2k+1)\pi$, l'equazione non è soddisfatta perché si ha: $0 - \sqrt{3} \neq 2$.

2

$\boxed{\operatorname{sen} x - \cos x = 1}$

Essendo $b = -c$, l'equazione ha la soluzione $x = (2k+1)\pi$, infatti: $0 - (-1) = 1$.

Procedendo poi come nell'esempio precedente, si ha:

$$\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1 \Rightarrow 2t - 1 + t^2 = 1 + t^2 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Pertanto, le soluzioni dell'equazione data sono:

$$x = (2k+1)\pi; \qquad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

4. Equazioni omogenee in sen x e cos x

Equazioni omogenee di secondo grado

Definizione

Si chiama *equazione omogenea* di 2° grado in sen x **e** cos x **un'equazione del tipo:**

(1) $$a \operatorname{sen}^2 x + b \operatorname{sen} x \cos x + c \cos^2 x = 0,$$

con a, b **e** c **numeri reali noti.**

Consideriamo i seguenti casi.

1 $\boxed{a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad c \neq 0}$

Possiamo supporre $\cos x \neq 0$, perché, per $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, la (1) non risulta soddisfatta, essendo $a \neq 0$.

Dividendo allora ambo i membri dell'equazione per $\cos^2 x$, si ottiene l'equazione equivalente:

(2) $$a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0,$$

che è un'equazione algebrica in tg x che sappiamo risolvere.

Esempi

1 *Risolvere l'equazione*: $\operatorname{sen}^2 x - (1 + \sqrt{3}) \operatorname{sen} x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x = 0$.

Dividendo ambo i membri dell'equazione per $\cos^2 x$, si ottiene l'equazione equivalente:

$$\operatorname{tg}^2 x - (1 + \sqrt{3}) \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0,$$

che, risolta, dà:

$$\operatorname{tg} x = \frac{1 + \sqrt{3} \pm \sqrt{1 + 3 + 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3}}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3} \pm \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3} \pm (1 - \sqrt{3})}{2},$$

ossia:

$$\operatorname{tg} x = 1 \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} x = \sqrt{3}.$$

Le soluzioni di queste ultime due equazioni sono, rispettivamente:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \qquad x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \qquad (k \in \mathbb{Z}),$$

che sono le soluzioni dell'equazione data.

2 *Risolvere l'equazione*: $\quad \operatorname{sen}^2 x - (2\sqrt{3}+3)\cos^2 x - 2\operatorname{sen} x \cos x = 0.$

Si divide per $\cos^2 x \neq 0$ e si ottiene l'equazione equivalente:

$$\operatorname{tg}^2 x - (2\sqrt{3}+3) - 2\operatorname{tg} x = 0,$$

che, risolta, dà:

$$\operatorname{tg} x = \frac{1 \pm \sqrt{1+3+2\sqrt{3}}}{1} = 1 \pm \sqrt{(1+\sqrt{3})^2} = 1 \pm (1+\sqrt{3}) =$$

$$= \begin{cases} 1+1+\sqrt{3} = 2+\sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{tg} x = 2+\sqrt{3} \Rightarrow x = \dfrac{5}{12}\pi + k\pi \\ 1-1-\sqrt{3} = -\sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \Rightarrow x = \dfrac{2}{3}\pi + k\pi, \qquad (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

2 $\boxed{a = 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0, \quad \textit{oppure} \quad a \neq 0,\ b \neq 0,\ c = 0}$

In questo caso, la (1) diventa:

$$b \operatorname{sen} x \cos x + c\cos^2 x = 0, \qquad \text{oppure:} \qquad a\operatorname{sen}^2 x + b\operatorname{sen} x \cos x = 0,$$

e si può scrivere nella forma:

$$\cos x(b\operatorname{sen} x + c\cos x) = 0, \qquad \text{oppure:} \qquad \operatorname{sen} x(a\operatorname{sen} x + b\cos x) = 0.$$

In entrambi i casi, si scinde poi nelle due equazioni:

$$\cos x = 0, \quad b\operatorname{sen} x + c\cos x = 0, \qquad \text{oppure:} \qquad \operatorname{sen} x = 0, \quad a\operatorname{sen} x + b\cos x = 0,$$

che sappiamo risolvere.

Ad esempio

Risolvere l'equazione:

$$\sqrt{3}\operatorname{sen} x \cos x - \cos^2 x = 0.$$

Si ha:

$$\cos x(\sqrt{3}\cdot \operatorname{sen} x - \cos x) = 0, \quad \text{ossia:} \quad \cos x = 0, \quad \sqrt{3}\cdot\operatorname{sen} x - \cos x = 0.$$

La prima equazione ammette le soluzioni:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad (k \in \mathbb{Z}),$$

e, per avere le soluzioni della seconda, occorre dividere ambo i membri per $\cos x$ (V. paragrafo precedente).

Si ottiene:

$$\sqrt{3}\cdot \operatorname{tg} x - 1 = 0, \quad \text{ossia:} \quad \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

le cui soluzioni sono:

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi, \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Tutte le soluzioni dell'equazione proposta sono perciò date dalle formule:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad x = \frac{\pi}{6} + k\pi, \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$