Alla (2) si riconduce anche l'equazione:

(3) $$\boxed{a\,\text{sen}^2x + b\,\text{sen}\,x\cos x + c\cos^2x = d, \qquad \text{con } d \neq 0}$$

che, infatti, si può scrivere nella forma:

(4) $$a\,\text{sen}^2x + b\,\text{sen}\,x\cos x + c\cos^2x = d(\text{sen}^2x + \cos^2x),$$

da cui, dividendo ambo i membri per $\cos^2x$, si ottiene:

(5) $$(a-d)\,\text{tg}^2x + b\,\text{tg}\,x + c - d = 0,$$

che sappiamo risolvere.

Si osservi però che l'equazione (5) è equivalente alla (3) solo se risulta $\cos x \neq 0$, (cioè: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$), poiché la (5) è stata ottenuta dall'equazione data dividendone ambo i membri per $\cos^2x$.

Pertanto, l'equazione (3) può avere come soluzioni, oltre a quelle dell'equazione (5), anche i valori: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, che abbiamo dovuto escludere per ottenere la (5).

Quindi, in pratica, *quando si deve risolvere un'equazione del tipo* (3), *si deve verificare se i valori*: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ *siano o meno soluzioni dell'equazione,* **prima** *di dividerne ambo i membri per* $\cos^2x$.

Esempi

1

Risolvere l'equazione: $(1+\sqrt{3})\,\text{sen}^2x - (1-\sqrt{3})\,\text{sen}\,x\cos x = \sqrt{3}$.

Si osservi innanzitutto che l'equazione non è soddisfatta per $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Posto quindi: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (il che equivale a supporre $\cos x \neq 0$), dopo aver scritto l'equazione nella forma:

$$(1+\sqrt{3})\text{sen}^2x - (1-\sqrt{3})\,\text{sen}\,x\cos x = \sqrt{3}(\cos^2x + \text{sen}^2x),$$

dividiamone ambo i membri per $\cos^2x$. Otteniamo:

$$\text{tg}^2x - (1-\sqrt{3})\text{tg}\,x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \text{tg}\,x = 1 \qquad \text{e} \qquad \text{tg}\,x = -\sqrt{3},$$

che ammettono le soluzioni:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \qquad x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

2

Risolvere l'equazione: $\text{sen}^2x + \sqrt{3}\,\text{sen}\,x\cos x = 1$.

Si osservi innanzitutto che i valori $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$, soddisfano l'equazione data.

Per avere ora le altre soluzioni dell'equazione, dividiamone ambo i membri per $\cos^2x$ e risolviamo l'equazione ottenuta:

$$\text{tg}\,x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi, \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Le soluzioni dell'equazione proposta sono dunque:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad x = \frac{\pi}{6} + k\pi, \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

In particolare, se $a = c = 0$ e $b \neq 0$, l'equazione assume la forma:

$$b \operatorname{sen} x \cos x = d, \quad \text{ossia:} \quad b \cdot 2 \operatorname{sen} x \cos x = 2d,$$

cioè:

$$\operatorname{sen} 2x = \frac{2d}{b},$$

che è un'equazione che sappiamo risolvere.

Ad esempio

Risolvere l'equazione: $\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{4}$

Si ha, moltiplicando ambo i membri per 2:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2}, \quad \text{ossia:} \quad \operatorname{sen} 2x = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

da cui si ricava:

- $2x = 60° + k \cdot 360° \quad \Rightarrow \; x = 30° + k \cdot 180°,$
- $2x = 120° + k \cdot 360° \quad \Rightarrow \; x = 60° + k \cdot 180°, \qquad (k \in \mathbb{Z}).$

Equazioni biquadratiche omogenee

Queste equazioni si trattano come le equazioni illustrate nel punto precedente, e pertanto ci limitiamo a fare qualche osservazione fondamentale, senza esporre tutti i diversi metodi di risoluzione.

Se dunque vogliamo risolvere l'equazione:

$$\boxed{a \operatorname{sen}^4 x + b \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + c \cos^4 x = 0}$$

dobbiamo dividere ambo i membri per $\cos^4 x (\neq 0)$, ottenendo:

$$a \operatorname{tg}^4 x + b \operatorname{tg}^2 x + c = 0,$$

che è una equazione biquadratica nell'incognita $\operatorname{tg} x$.

Inoltre, se:

- $\boxed{a = 0} \quad \Rightarrow$ l'equazione diventa:

  $$\boxed{b \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + c \cos^4 x = 0}$$

  e si ha:

  $$\cos^2 x (b \operatorname{sen}^2 x + c \cos^2 x) = 0,$$

  che si scinde nelle due equazioni:

  $$\cos^2 x = 0, \qquad b \operatorname{sen}^2 x + c \cos^2 x = 0,$$

  che sappiamo risolvere (par. 3).

- $\boxed{d \neq 0}$ [(1)] $\Rightarrow$ si ha:

  $$\boxed{a \operatorname{sen}^4 x + b \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + c \cos^4 x = d}$$

  e si ricorre all'artificio già usato nell'analoga equazione di 2° grado vista al punto precedente, moltiplicando d per $1 = (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)^2$.

---

(1) Ovvero, se il termine noto è diverso da zero.

Esempi

1 *Risolvere l'equazione*: $6\,\mathrm{sen}^4x + 2\,\mathrm{sen}^2x\cos^2x + 4\cos^4x = 3.$

Si scrive $3 = 3(\mathrm{sen}^2x + \cos^2x)^2$, si sviluppa e si dividono ambo i membri per $\cos^4x$, ottenendo:

$$3\,\mathrm{tg}^4x - 4\,\mathrm{tg}^2\,x + 1 = 0,$$

da cui si ha:

$$\mathrm{tg}\,x = 1 \qquad \text{e quindi} \qquad x = \frac{\pi}{4} + k\pi,$$

$$\mathrm{tg}\,x = -1 \qquad \text{e quindi} \qquad x = \frac{3\pi}{4} + k\pi,$$

$$\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \text{e quindi} \qquad x = \frac{\pi}{6} + k\pi,$$

$$\mathrm{tg}\,x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \text{e quindi} \qquad x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

2 *Risolvere l'equazione*: $\mathrm{sen}^4x - \mathrm{sen}^2x\cos^2x - 6\cos^4x = 0.$

Dividendo ambo i membri per $\cos^4x(\neq 0)$, si ottiene:

$$\mathrm{tg}^4x - \mathrm{tg}^2x - 6 = 0.$$

Questa è un'equazione biquadratica nell'incognita $\mathrm{tg}\,x$, che, risolta, dà:

$$\mathrm{tg}^2x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2},$$

ossia:

$$\mathrm{tg}^2x = 3 \quad \text{e} \quad \mathrm{tg}^2x = -2.$$

La seconda equazione è impossibile, mentre, dalla prima, si ottiene: $\mathrm{tg}\,x = \pm\sqrt{3}$.

Le soluzioni di queste ultime due equazioni sono dunque:

$$x = \pm 60° + k\,180°, \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

3 *Risolvere l'equazione*: $4\,\mathrm{sen}^2x\cos^2x - 4\cos^4x = 0.$

Questa equazione si trasforma nella:

$$4\cos^2x(\mathrm{sen}^2x - \cos^2x) = 0,$$

che si scinde nelle due equazioni:

$$\cos^2x = 0 \quad \text{e} \quad \mathrm{sen}^2x = \cos^2x,$$

che, risolte, forniscono le soluzioni:

$$x = 90° + k\,180° \quad \text{e} \quad x = 45° + k\,90°, \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

In particolare, se $a = c = 0$ e $b \neq 0$, l'equazione assume la forma:

$$b \operatorname{sen} x \cos x = d, \quad \text{ossia:} \quad b \cdot 2 \operatorname{sen} x \cos x = 2d,$$

cioè:

$$\operatorname{sen} 2x = \frac{2d}{b},$$

che è un'equazione che sappiamo risolvere.

Ad esempio

Risolvere l'equazione: $\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{4}$

Si ha, moltiplicando ambo i membri per 2:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2}, \quad \text{ossia:} \quad \operatorname{sen} 2x = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

da cui si ricava:

- $2x = 60° + k \cdot 360° \Rightarrow x = 30° + k \cdot 180°,$
- $2x = 120° + k \cdot 360° \Rightarrow x = 60° + k \cdot 180°, \qquad (k \in \mathbb{Z}).$

Equazioni biquadratiche omogenee

Queste equazioni si trattano come le equazioni illustrate nel punto precedente, e pertanto ci limitiamo a fare qualche osservazione fondamentale, senza esporre tutti i diversi metodi di risoluzione.

Se dunque vogliamo risolvere l'equazione:

$$\boxed{a \operatorname{sen}^4 x + b \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + c \cos^4 x = 0}$$

dobbiamo dividere ambo i membri per $\cos^4 x (\neq 0)$, ottenendo:

$$a \operatorname{tg}^4 x + b \operatorname{tg}^2 x + c = 0,$$

che è una equazione biquadratica nell'incognita $\operatorname{tg} x$.

Inoltre, se:

- $\boxed{a = 0} \Rightarrow$ l'equazione diventa:

$$\boxed{b \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + c \cos^4 x = 0}$$

e si ha:

$$\cos^2 x (b \operatorname{sen}^2 x + c \cos^2 x) = 0,$$

che si scinde nelle due equazioni:

$$\cos^2 x = 0, \qquad b \operatorname{sen}^2 x + c \cos^2 x = 0,$$

che sappiamo risolvere (par. 3).

- $\boxed{d \neq 0}$ (1) $\Rightarrow$ si ha:

$$\boxed{a \operatorname{sen}^4 x + b \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + c \cos^4 x = d}$$

e si ricorre all'artificio già usato nell'analoga equazione di 2° grado vista al punto precedente, moltiplicando d per $1 = (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)^2$.

(1) Ovvero, se il termine noto è diverso da zero.

Esempi

1 *Risolvere l'equazione*: $6\,\text{sen}^4 x + 2\,\text{sen}^2 x \cos^2 x + 4\cos^4 x = 3$.

Si scrive $3 = 3(\text{sen}^2 x + \cos^2 x)^2$, si sviluppa e si dividono ambo i membri per $\cos^4 x$, ottenendo:

$$3\,\text{tg}^4 x - 4\,\text{tg}^2 x + 1 = 0,$$

da cui si ha:

$$\text{tg}\,x = 1 \quad \text{e quindi} \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi,$$

$$\text{tg}\,x = -1 \quad \text{e quindi} \quad x = \frac{3\pi}{4} + k\pi,$$

$$\text{tg}\,x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{e quindi} \quad x = \frac{\pi}{6} + k\pi,$$

$$\text{tg}\,x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{e quindi} \quad x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

2 *Risolvere l'equazione*: $\text{sen}^4 x - \text{sen}^2 x \cos^2 x - 6\cos^4 x = 0$.

Dividendo ambo i membri per $\cos^4 x (\neq 0)$, si ottiene:

$$\text{tg}^4 x - \text{tg}^2 x - 6 = 0.$$

Questa è un'equazione biquadratica nell'incognita $\text{tg}\,x$, che, risolta, dà:

$$\text{tg}^2 x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2},$$

ossia:

$$\text{tg}^2 x = 3 \quad \text{e} \quad \text{tg}^2 x = -2.$$

La seconda equazione è impossibile, mentre, dalla prima, si ottiene: $\text{tg}\,x = \pm\sqrt{3}$.

Le soluzioni di queste ultime due equazioni sono dunque:

$$x = \pm 60° + k\,180°, \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

3 *Risolvere l'equazione*: $4\,\text{sen}^2 x \cos^2 x - 4\cos^4 x = 0$.

Questa equazione si trasforma nella:

$$4\cos^2 x(\text{sen}^2 x - \cos^2 x) = 0,$$

che si scinde nelle due equazioni:

$$\cos^2 x = 0 \quad \text{e} \quad \text{sen}^2 x = \cos^2 x,$$

che, risolte, forniscono le soluzioni:

$$x = 90° + k\,180° \quad \text{e} \quad x = 45° + k\,90°, \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$