1 Gli angoli, gli archi e la loro misura

1.1 Angoli ed archi

Se in un piano si tracciano due semirette aventi l'origine in comune il piano viene diviso in due parti, ciascuna delle quali viene chiamata **angolo.** Le due semirette vengono dette i lati dei due angoli e l'origine comune il loro vertice.

Data una circonferenza avente il centro nel vertice di un angolo, si chiama **arco circolare** quella parte di circonferenza interna all'angolo e avente per estremi i punti di intersezione con i lati dell'angolo stesso (nella figura 1.1 è rappresentato l'arco $\overset{\frown}{AB}$ di una circonferenza corrispondente ad un angolo α; il punto O, vertice dell'angolo, è il centro della circonferenza).

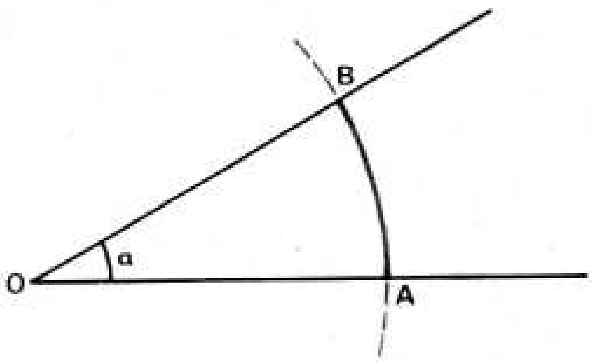

Figura 1.1 L'arco $\overset{\frown}{AB}$ di circonferenza è il corrispondente dell'angolo α.

1.2 Misura degli angoli e degli archi

Per misurare una grandezza occorre fissare l'unità di misura. Le più usate unità di misura degli angoli sono il grado ed il radiante.

Si chiama *grado* la 360ª parte dell'angolo giro. I suoi multipli sono il *minuto primo* (o semplicemente *primo*), che è $\frac{1}{60}$ di grado, ed il *minuto secondo* (o semplicemente *secondo*), che è $\frac{1}{60}$ di primo.

Si chiama *radiante* l'angolo al centro di una circonferenza, di raggio arbitrario, che sottende un arco di lunghezza uguale al raggio stesso (si tenga presente che se un angolo al centro di una circonferenza sottende un arco lungo quanto il raggio ciò succede per ogni altra circonferenza concentrica con la prima). Ovviamente, se la lunghezza dell'arco sotteso è, ad esempio, metà di quella del raggio, l'angolo è di mezzo radiante; se è doppia di quella del raggio, l'angolo è di due radianti; e così via. L'angolo giro, che sottende l'intera circonferenza (la cui lunghezza è 2π volte quella del raggio), è di 2π radianti; l'angolo piatto è di π radianti; l'angolo retto di $\frac{\pi}{2}$ radianti. In generale, la misura in radianti di un angolo che sottende un arco circolare di lunghezza l, è $\frac{l}{r}$, essendo r il raggio della circonferenza di cui l'arco è parte.

Per quanto concerne l'unità di misura degli archi circolari risulta conveniente assumere come unità l'arco il cui angolo al centro corrispondente è l'unità di misura degli angoli. Si ha così l'*arco grado,* che è l'arco di circonferenza che corrisponde all'angolo al centro di un grado, e l'*arco radiante,* che è l'arco di circonferenza che corrisponde all'angolo al centro di un radiante. Seguendo questa convenzione la misura di un arco di circonferenza e la misura del corrispondente angolo al centro sono espresse dallo stesso numero.

È di importanza pratica sapere come si passa dalla misura di un angolo (o di un arco) in gradi, alla misura in radianti dello stesso angolo (o arco), e viceversa.

Dette x° e x^r le misure, rispettivamente in gradi ed in radianti, di uno stesso angolo (o arco) si ha:

$$360^\circ : 2\pi = x^\circ : x^r$$

Da questa proporzione si ricavano le due formule:

$$x^r = \frac{x^\circ}{180^\circ}\pi \qquad \text{e} \qquad x^\circ = \frac{x^r}{\pi}180^\circ$$

la prima delle quali dà la misura in radianti, nota quella in gradi, la seconda la misura in gradi, nota quella in radianti.

Esempi:

1) Esprimere in radianti la misura dell'angolo di 25°.
Ponendo $x^\circ = 25^\circ$ nella prima formula si ha:

$$x^r = \frac{25^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{5}{36}\pi$$

2) Esprimere in gradi la misura dell'angolo radiante.
Ponendo $x^r = 1$ nella seconda formula si ottiene:

$$x^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \simeq 57^\circ\, 17'\, 45''$$

Per comodità di consultazione riportiamo nella seguente tabella le misure in radianti di alcuni angoli particolari.

gradi	0°	18°	30°	36°	45°	60°	72°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
radianti	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

1.3 Altre unità di misura

Il sistema di misura degli angoli (o degli archi) che considera il grado come unità ed il primo ed il secondo come suoi sottomultipli, si dice **sessagesimale**; quello che assume il radiante come unità, si dice **circolare.** Di questi due sistemi abbiamo già trattato; accenniamo ora ad altri sistemi.

Si chiama **sessadecimale** il sistema di misura che assume ancora il grado come unità, ma come sottomultipli la sua decina, centesima, millesima,... parte.

Se un angolo misura $54°\,15'$ nel sistema sessagesimale misura $54°,25$ nel sistema sessadecimale (infatti: $54°\,15' = \left(54 + \frac{15}{60}\right)^{\circ} = (54 + 0{,}25)° = 54°{,}25$). Viceversa un angolo che nel sistema sessadecimale è di $32°{,}45$ nel sistema sessagesimale è di $32°\,27'$ (infatti volendo trasformare i 45 centesimi di grado in primi si può scrivere la proporzione $45 : 100 = x' : 60$, dalla quale si ricava $x' = 27$).

Si chiama **centesimale** il sistema di misura che assume come unità il grado centesimale, definito come la centesima parte dell'angolo retto. I sottomultipli del grado centesimale sono il minuto primo centesimale, che è $\frac{1}{100}$ del grado centesimale ed il minuto secondo centesimale, che è la centesima parte del primo centesimale. Per indicare che un angolo è di 28 gradi centesimali, 16 primi e 8 secondi si scrive: $28^g{,}1608$.

Per trasformare una misura angolare dal sistema sessagesimale a quello centesimale occorre trovare innanzitutto la corrispondente misura sessadecimale, quindi moltiplicare quest'ultima per $\frac{10}{9}$. Per esempio, se un angolo nel sistema sessagesimale è di $14°\,30'\,15''$, nel sistema sessadecimale è di $\left(14 + \frac{30}{60} + \frac{15}{3600}\right)^{\circ} = \left(14 + \frac{121}{240}\right)^{\circ} \simeq 14°,\,5042$ e nel sistema centesimale è di $\frac{10}{9} \cdot 14,\,5042 = 16^g 1158$.

Il sistema centesimale è soprattutto usato nella graduazione di strumenti topografici.

Si chiama **orario** il sistema la cui unità di misura è l'ora, definita come la ventiquattresima parte dell'angolo giro. I sottomultipli dell'ora sono il minuto primo, che è $\frac{1}{60}$ dell'ora, ed il minuto secondo, che è $\frac{1}{60}$ del primo.

Per indicare in questo sistema che un angolo è di 13 ore, 7 minuti primi e 25 minuti secondi si scrive $13^h\ 7^m\ 25^s$.

Il sistema orario trova applicazioni in astronomia ed in navigazione.

Facciamo presente che molte calcolatrici tascabili sono predisposte per operare su misure angolari espresse nei sistemi circolare, sessagesimale, sessadecimale e centesimale; inoltre sono in grado di effettuare le trasformazioni da un sistema di misura ad un altro.

1.4 Angoli ed archi orientati e loro misura

È spesso necessario attribuire ad un angolo una orientazione. Un angolo si dice orientato quando i suoi lati sono considerati in un certo ordine, quando cioè è stabilito quale dei due deve considerarsi come primo. In tal caso l'angolo può essere pensato come generato dalla rotazione del primo lato (lato origine) verso il secondo (lato termine), fino alla sovrapposizione dei due.

Nella figura 1.2 sono rappresentati due angoli; se in entrambi si considera *a* come lato origine e *b* come lato termine (la scrittura $\widehat{ab}$ viene usata per indicare l'angolo nel caso di questa scelta), il primo (fig. 1.2a) risulta orientato in senso antiorario, cioè discorde con quello di rotazione delle lancette dell'orologio, il secondo (fig. 1.2b) in senso orario.

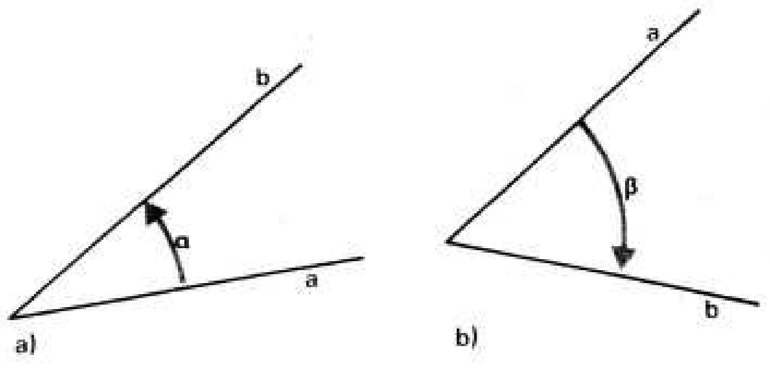

Figura 1.2 Nel caso a) l'angolo $\alpha = \widehat{ab}$ è orientato in senso antiorario e viene detto positivo; nel caso b) l'angolo $\beta = \widehat{ab}$ è orientato in senso orario e viene detto negativo.

Convenendo di considerare *positiva una rotazione che avviene nel verso antiorario e negativa quella che avviene nel verso orario,* l'angolo della figura 1.2a viene detto angolo positivo mentre quello della figura 1.2b viene detto angolo negativo.

La misura di un angolo orientato si ottiene premettendo alla sua misura assoluta il segno + se l'angolo è positivo, il segno − se è negativo.

Quanto si è detto per gli angoli vale anche per gli archi. Nella figura 1.3a è rappresentato un arco di circonferenza $\widehat{AB}$ positivo; nella figura 1.3b un arco $\widehat{AB}$ negativo.

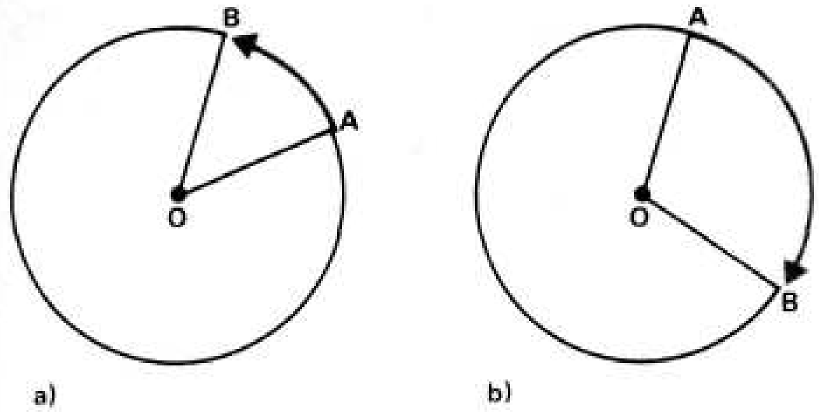

Figura 1.3 L'arco $\widehat{AB}$ è positivo nel caso a), mentre è negativo nel caso b).