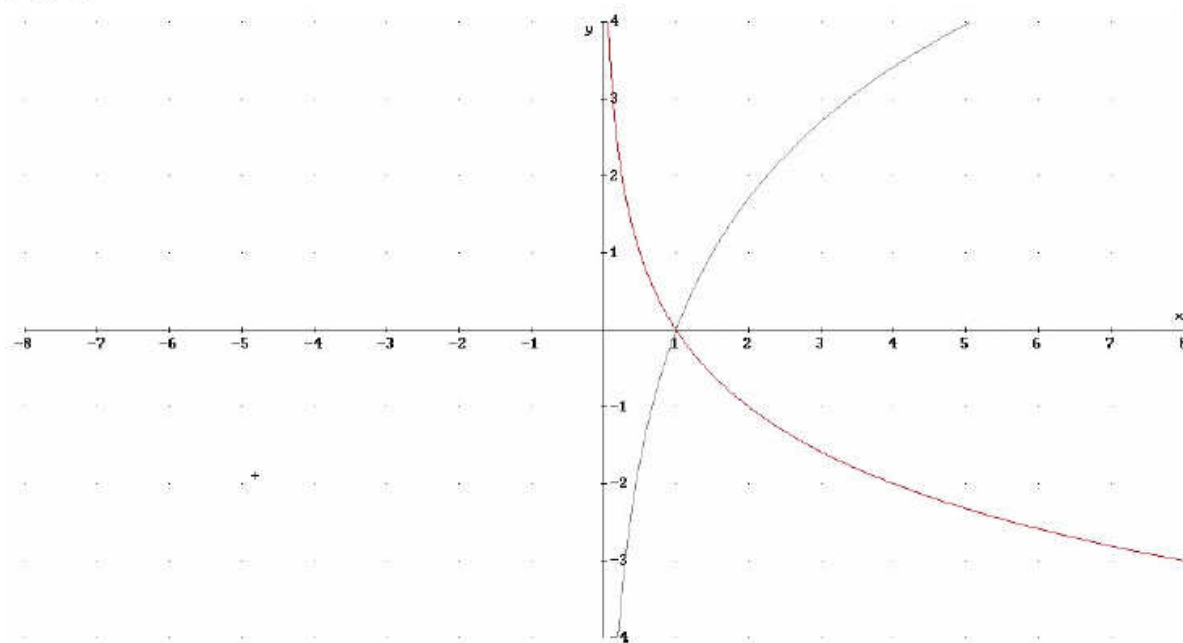


Funzione logaritmica e curva logaritmica

La funzione $y = \log_a x$ ($0 < a$ diverso da 1, $x > 0$), che dà il logaritmo della variabile x , si chiama funzione logaritmica e il grafico corrispondente curva logaritmica.

Il grafico in blu rappresenta la funzione sopraccitata con $a > 1$, quello in rosso con $0 < a < 1$.



In accordo con quanto detto sulle potenze dei numeri reali positivi e osservando i grafici suddetti si può affermare che:

a) lo 0 e i numeri negativi non hanno logaritmi reali, qualunque sia la base reale a (positiva).

Es: $\log 0$: non esiste; $\log -10$: non esiste (in qualunque base)

b) il logaritmo della base è 1, qualunque sia la base.

Es: $\log_a a = 1$ perché $a^1 = a$

c) il logaritmo di 1 è 0 in qualsiasi base.

Es: $\log_a 1 = 0$ perché $a^0 = 1$

d) base $a > 1$: al crescere di x da 0 a $+\infty$, il logaritmo di x cresce continuamente da $-\infty$ a $+\infty$ e si mantiene negativo per $x < 1$, è positivo per $x > 1$ ed è nullo per $x = 1$.

e) base $0 < a < 1$: al crescere di x da 0 a $+\infty$, il logaritmo di x decresce continuamente da $+\infty$ a $-\infty$ e si mantiene positivo per $x < 1$, è negativo per $x > 1$ ed è nullo per $x = 1$.

Passaggio da un sistema di logaritmi in base a ad un altro in base b (cambiamento di base)

Molte volte occorre conoscere il logaritmo y di un numero N in una base a, conoscendone quello x in base b e viceversa .

Per definizione si ha :

$$y = \log_a N \quad \text{e} \quad x = \log_b N$$

quindi ne consegue :

$$a^y = N \quad \text{e} \quad b^x = N \quad \text{e pertanto :}$$

$a^y = b^x$ e prendendo i logaritmi in base b di entrambi i membri si ottiene:

$$y \log_b a = x \quad \text{da cui :} \quad y = \frac{1}{\log_b a} x \quad \text{e prendendo invece i logaritmi in base a si ottiene :}$$

$$y = x \log_a b \quad \text{da cui :} \quad x = \frac{1}{\log_a b} y$$

Il fattore $\frac{1}{\log_b a}$ (e similmente $\frac{1}{\log_a b}$) si chiama modulo di trasformazione per il

passaggio dal sistema di logaritmi a base b al sistema di logaritmi a base a e dipende esclusivamente dalle due basi a, b.

Pertanto se si pone $M = \frac{1}{\log_b a}$ si ottiene :

$$\log_a N = M \cdot \log_b N$$

che si può enunciare : il logaritmo di un numero qualunque a base a è uguale al prodotto del modulo di trasformazione per il logaritmo dello stesso numero a base b.

Esempio : supponiamo di conoscere il logaritmo in base 5 di tutti i numeri ; si ha allora

$$\log_3 12 = \log_5 12 \cdot \frac{1}{\log_5 3} \quad \text{e con questa formula si ottengono i logaritmi di tutti i numeri in}$$

base 3.

$$\frac{\log_b a}{\log_b c} = \log_c a$$