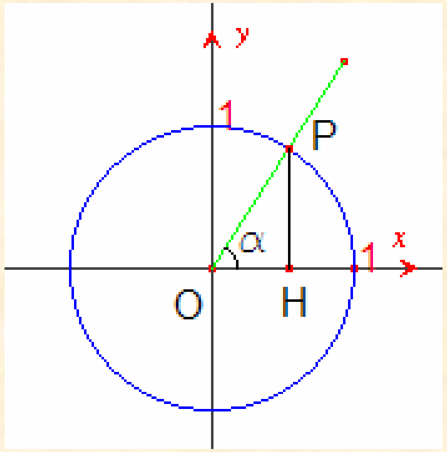
Trigonometria

Parte della matematica che si occupa di studiare le relazioni tra i lati e gli angoli di un triangolo

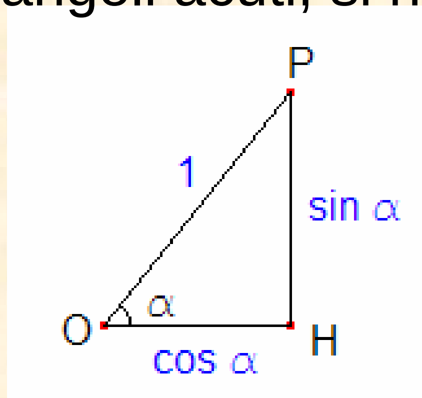
I triangoli rettangoli

Premessa: ricordiamo le definizioni di seno e coseno di un angolo α **acuto**:



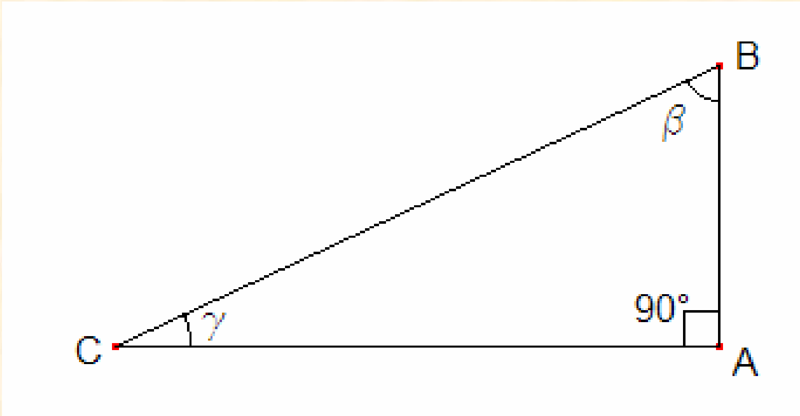
$$\cos\alpha = x_P = \overline{OH}$$
$$\sin\alpha = y_P = \overline{PH}$$

Quindi in un triangolo rettangolo di ipotenusa uguale a 1, se α è uno dei due angoli acuti, si ha che

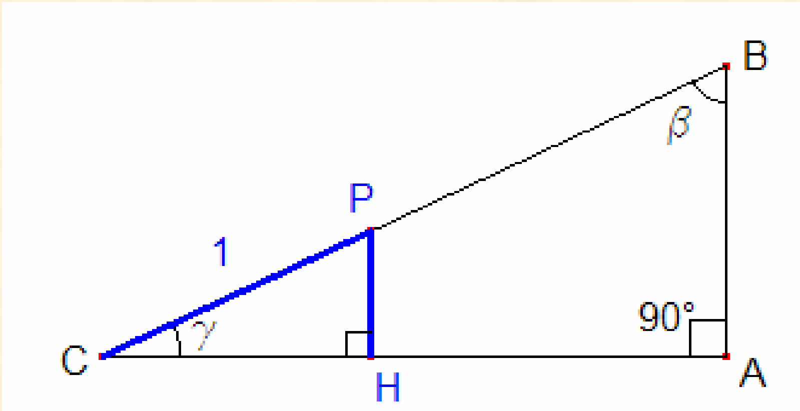


$$\overline{OH} = \cos\alpha$$
$$\overline{PH} = \sin\alpha$$

Consideriamo il triangolo rettangolo ABC in figura:



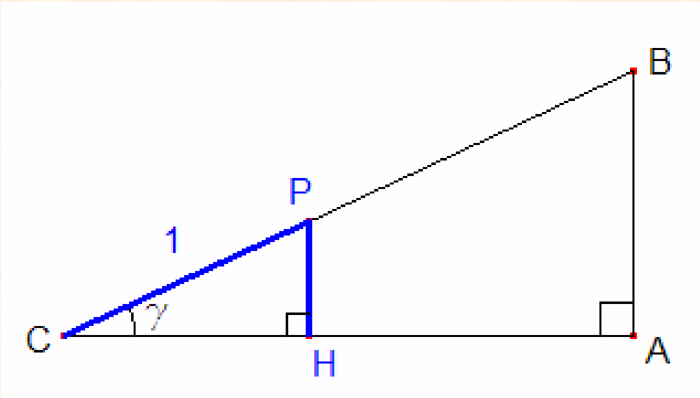
e prendiamo sull'ipotenusa un punto P in modo che $\overline{CP} = 1$



Indichiamo con H la proiezione del punto P sul lato CA. Si ha :

$$\overline{CH} = \cos\gamma \qquad \overline{PH} = \sin\gamma$$

I triangoli CHP e CAB sono simili (hanno gli angoli congruenti a due a due), quindi i lati sono proporzionali



$$\overline{AB} : \overline{PH} = \overline{CB} : \overline{CP}$$

$$\overline{AB} : \sin\gamma = \overline{CB} : 1$$

che si può anche scrivere:

$$\frac{\overline{AB}}{\sin\gamma} = \overline{CB}$$

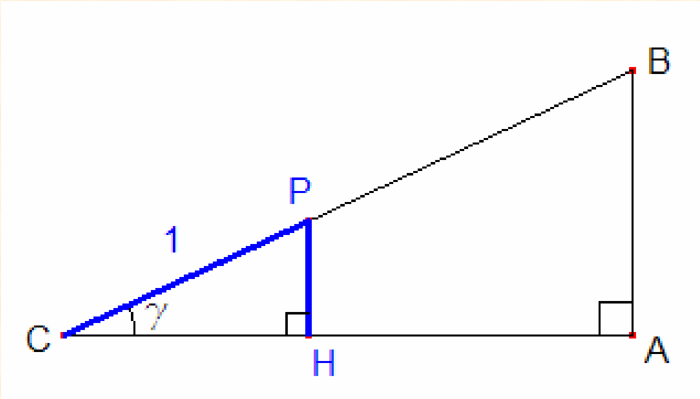
Moltiplicando entrambi i membri per *sin* γ si ottiene:

$$\overline{AB} = \overline{CB} \cdot \sin\gamma$$

Questa relazione si esprime dicendo che

un cateto è uguale al prodotto dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto al cateto

In modo analogo vale la seguente proporzione:



$$\overline{CA} : \overline{CH} = \overline{CB} : \overline{CP}$$

$$\overline{CA} : \cos\gamma = \overline{CB} : 1$$

che si può anche scrivere:

$$\frac{\overline{CA}}{\cos\gamma} = \overline{CB}$$

Moltiplicando entrambi i membri per *cos* γ si ottiene:

$$\overline{CA} = \overline{CB} \cdot \cos\gamma$$

Questa relazione si esprime dicendo che

un cateto è uguale al prodotto dell'ipotenusa per il coseno dell'angolo adiacente al cateto

Le due relazioni precedenti rappresentano l’enunciato del

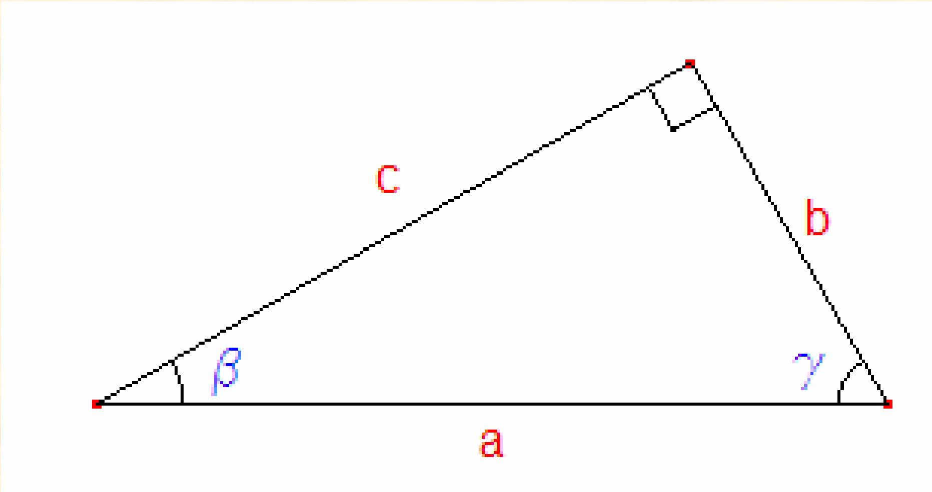
<u>primo teorema sui triangoli rettangoli:</u>

In ogni triangolo rettangolo un cateto è uguale:

- ✓ al prodotto dell’ipotenusa per il seno dell’angolo opposto al cateto da trovare
- ✓al prodotto dell’ipotenusa per il coseno dell’angolo adiacente al cateto da trovare

Vediamo un esempio:

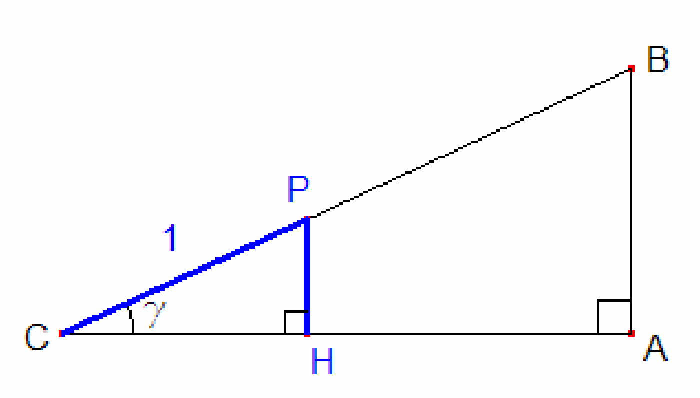
come possiamo trovare i cateti in figura conoscendo l'ipotenusa *a* e gli angoli acuti β e γ?



$$b = a \cdot \cos\gamma \qquad c = a \cdot \cos\beta$$

$$b = a \cdot \sin\beta \qquad c = a \cdot \sin\gamma$$

Torniamo al triangolo rettangolo iniziale; si può scrivere anche la seguente proporzione:



$$\overline{AB} : \overline{PH} = \overline{AC} : \overline{CH}$$

$$\overline{AB} : \sin\gamma = \overline{AC} : \cos\gamma$$

$$\frac{\overline{AB}}{\sin\gamma} = \frac{\overline{AC}}{\cos\gamma}$$

Moltiplicando entrambi i membri per *sin* γ si ottiene:

$$\overline{AB} = \overline{AC} \cdot \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}$$

$$\boxed{\overline{AB} = \overline{AC} \cdot \tan\gamma}$$

Moltiplicando entrambi i membri per *cos* γ si ottiene:

$$\overline{AC} = \overline{AB} \cdot \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}$$

$$\boxed{\overline{AC} = \overline{AB} \cdot \cot\gamma}$$

Le due relazioni precedenti rappresentano l'enunciato del

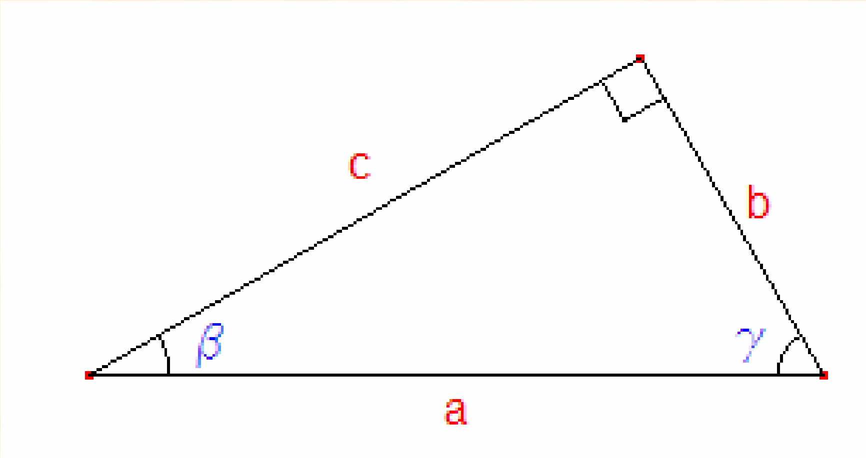
<u>secondo teorema sui triangoli rettangoli:</u>

In ogni triangolo rettangolo un cateto è uguale:

- ✓ al prodotto dell'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto al cateto da trovare
- ✓ al prodotto dell'altro cateto per la cotangente dell'angolo adiacente al cateto da trovare

Vediamo un esempio:

come possiamo trovare un cateto conoscendo l'altro cateto e gli angoli acuti β e γ?



$$b = c \cdot \tan\beta \qquad c = b \cdot \tan\gamma$$

$$b = c \cdot \cot\gamma \qquad c = b \cdot \cot\beta$$

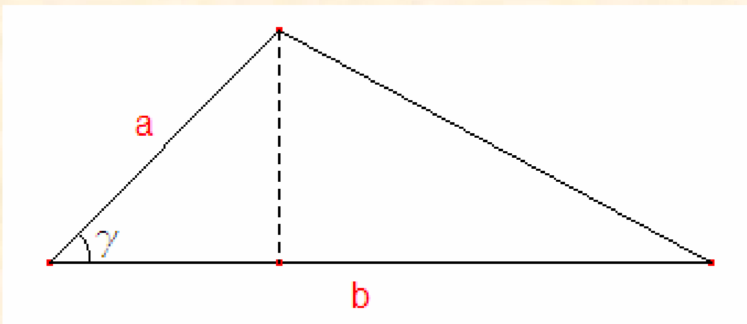
Conseguenze dei teoremi sui triangoli rettangoli

CALCOLO DELL'AREA DI UN TRIANGOLO

Per calcolare l'area di un triangolo qualsiasi, abbiamo sempre utilizzato la formula

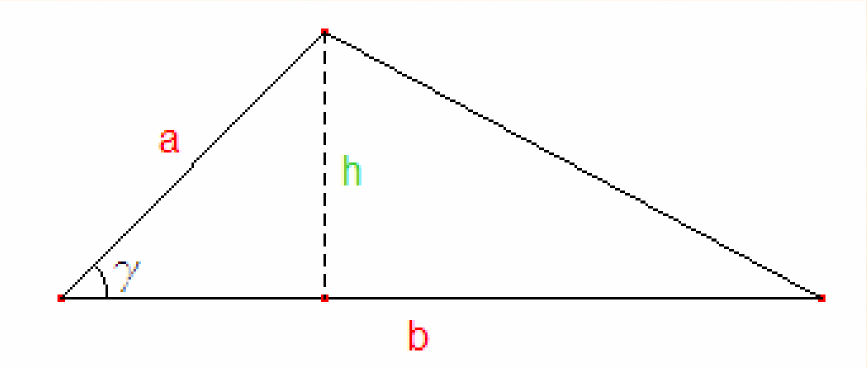
$$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$$

Supponiamo di conoscere le misure di 2 lati *a* e *b* e dell'angolo γ tra essi compreso:



Possiamo determinare la misura dell’altezza indicata in figura utilizzando il 1° teorema sui triangoli rettangoli:

$$h = a \cdot \sin\gamma$$



Si ricava quindi la seguente formula per il calcolo dell’area di un triangolo:

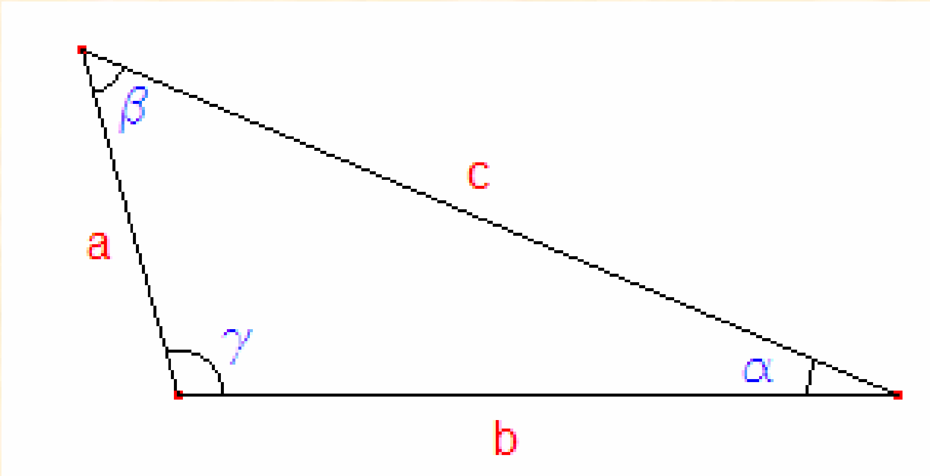
$$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot a \cdot \sin\gamma$$

Quindi l’area di un triangolo è data dal

semiprodotto di due suoi lati per il seno dell’angolo tra essi compreso

Vediamo un esempio:

come possiamo calcolare l'area del triangolo in figura conoscendo due lati e l'angolo compreso tra essi?



$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma$$

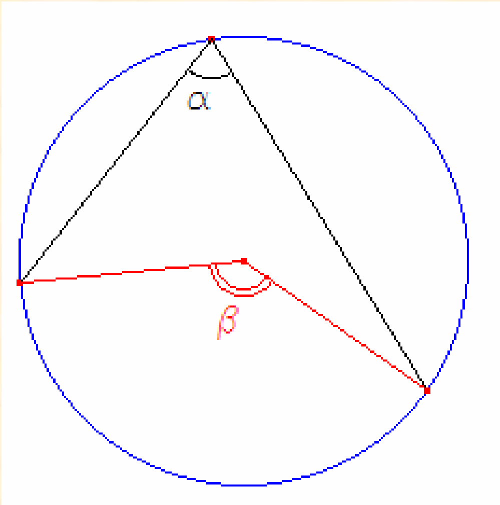
$$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin\beta$$

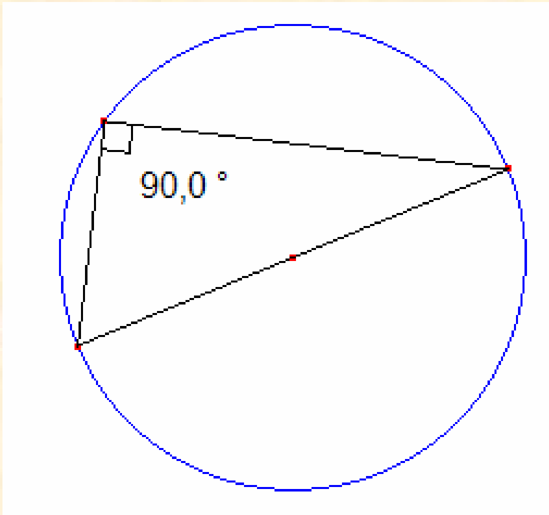
TEOREMA DELLA CORDA

Premessa: ricordiamo due risultati importanti di geometria che ci serviranno per enunciare il teorema successivo:

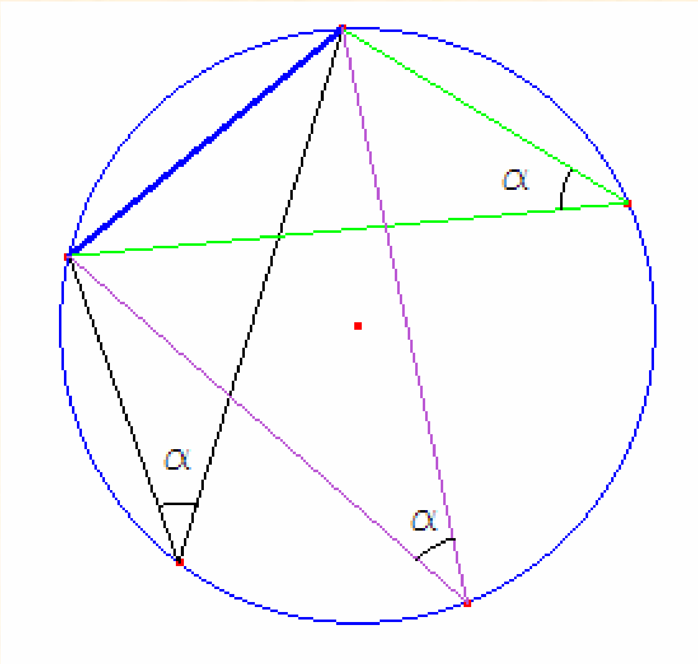
- *In una circonferenza* ***ogni angolo alla circonferenza è la metà dell'angolo al centro corrispondente****; in particolare* ***un angolo alla circonferenza che insiste su un diametro è retto***

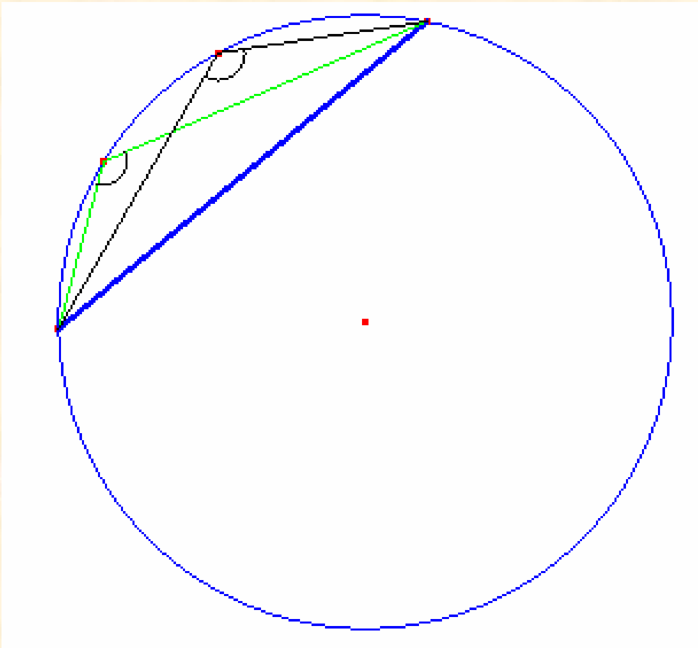


$$\alpha = \frac{1}{2}\beta$$

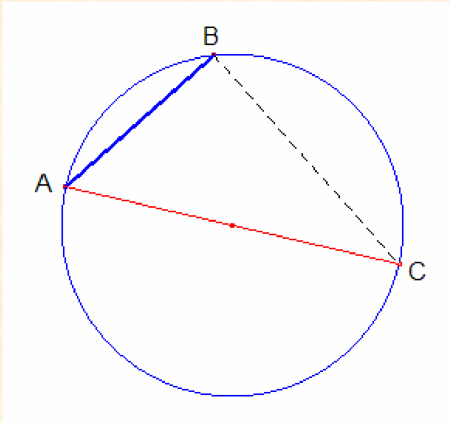


- *In una circonferenza* ***tutti gli angoli alla circonferenza che insistono sulla stessa corda dalla stessa parte (rispetto alla corda) sono congruenti tra loro***



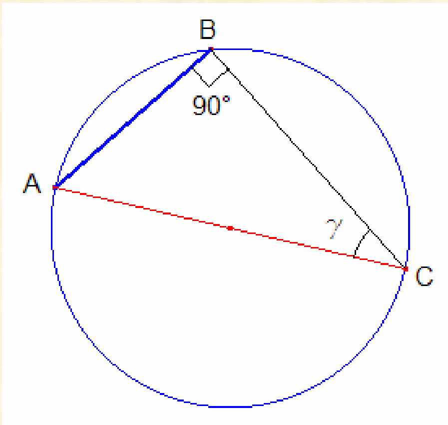


Consideriamo una circonferenza di *raggio r* e una *corda AB* di tale circonferenza; disegniamo anche il *diametro AC*



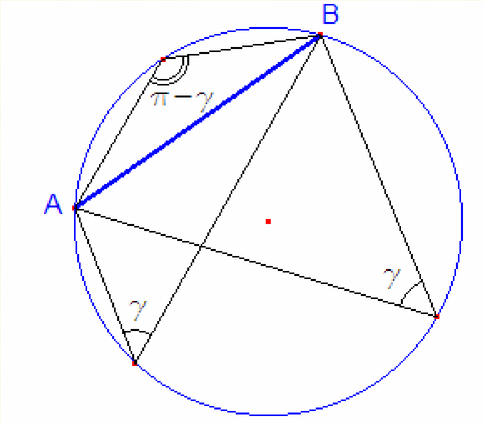
Il triangolo ABC è rettangolo (l'angolo in B insiste sul diametro AC e quindi è retto).

Dal 1° teorema sui triangoli rettangoli, il cateto AB è uguale all'ipotenusa AC per il seno dell'angolo ACB

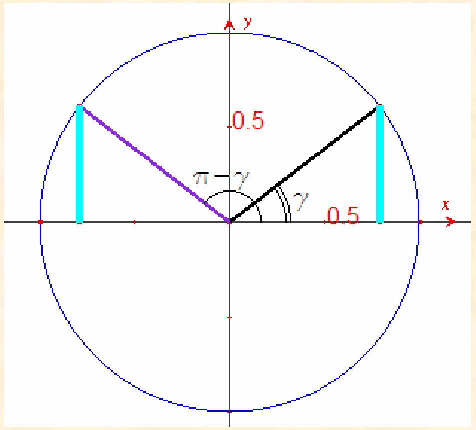


$$\overline{AB} = 2r \cdot \sin\gamma$$

Sapendo che tutti gli angoli che insistono su AB hanno ampiezza γ oppure $\pi - \gamma$:



e che *sin*$(\pi - \gamma)$=*sin* γ

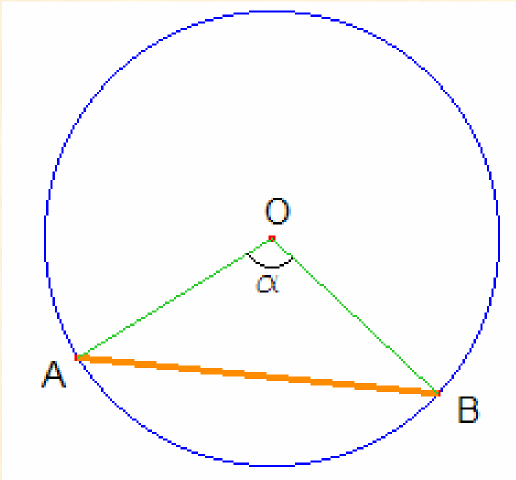


possiamo enunciare il seguente teorema:

Teorema della corda: In ogni circonferenza ciascuna corda è uguale al prodotto del diametro per il seno di uno qualunque degli angoli alla circonferenza che insistono su una corda

Vediamo un esempio:

come possiamo determinare la misura della corda AB conoscendo il raggio della circonferenza e la misura dell’angolo al centro α che insiste sulla corda?



Ricordando che ogni angolo alla circonferenza che insiste sulla corda AB è la metà dell’angolo al centro corrispondente, si ricava che

$$\overline{AB} = 2r \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)$$