DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO

$$ax^2 + bx + c > 0$$

a	**Δ**	**F(x)**	**Soluzioni**
$a>0$	$\Delta>0$	F(x) >0	Valori esterni all'intervallo delle radici $x<x_1 \vee x>x_2$
$a>0$	$\Delta<0$	F(x) >0	Tutti i valori di x $\forall x \in R$
$a>0$	$\Delta=0$	F(x) >0	Tutti i valori diversi da $x_1=x_2$ $\forall x \in R-\{x_1\}$

$$ax^2 - bx + c < 0$$

a	**Δ**	**F(x)**	**Soluzioni**
$a>0$	$\Delta>0$	F(x) <0	Valori interni all'intervallo delle radici $x_1< x<x_2$
$a>0$	$\Delta<0$	F(x) <0	nessun valore di x $\varnothing$
$a>0$	$\Delta=0$	F(x) <0	nessun valore di x $\varnothing$

FUNZIONI ESPONENZIALI

$f(x)= a^x$

con $a=1$ la funzione è costante

$a>0$ e $a \neq 1$ funzione esponenziale di base a

se $a> 1$ la funzione esponenziale è crescente

se $0<a<1$ la funzione esponenziale è decrescente

EQUAZIONI ESPONENZIALI

$a^x=b$

con $a>0$ e $\neq 1$
con $b>0$

l’equazione ammette una sola soluzione

positiva	**a**>1 e **b**>1
	0<**a** <1 e 0<**b**<1

Negativa	**a**>1 e **b**<1
	a<1 e **b**>1

Uguale a 0	**B=1 e a >0**

DISEQUAZIONI ESPONENZIALI

$a^x > b$

$a^x < b$

consideriamo a^r e a^s

condizione di realtà	$\neq 0^0$
	$r<0$ $s<0$

Se a>0 => a^r è un numero reale positivo

Se a>1 => $a^r > a^s$ segue che $r>s$ e viceversa

Se 0 < a < 1 => $a^r > a^s$ segue che $r<s$ e viceversa

Per i logaritmi

Se a>1 => $b > c$ segue che $\log_a b > \log_a c$

Se 0 < a < 1 => $b > c$ segue che $\log_a b < \log_a c$

Disequazioni riducibili a disuguaglianze di due potenze di ugual base

$$\boxed{a^{f(x)} > a^{g(x)}, \qquad \textbf{oppure:} \qquad a^{f(x)} < a^{g(x)}}$$

Si ha allora, se:

$\boxed{a > 1}$: $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Rightarrow f(x) > g(x)$; $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Rightarrow f(x) < g(x)$;

$\boxed{0 < a < 1}$: $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Rightarrow f(x) < g(x)$; $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Rightarrow f(x) > g(x)$.

Ad esempio

- $5^x > 5^3 \Rightarrow x > 3$; $5^x < 5^5 \Rightarrow x < 5$.
- $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow x < 2$; $\left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow x > 3$.

Disequazioni risolubili con l'utilizzo di un'incognita ausiliaria

Ad esempio

Risolvere la disequazione: $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 > 0$.

Si ha:

$$2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 > 0 \quad \Rightarrow \quad (2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 8 > 0.$$

Posto $2^x = t$, la disequazione si scrive: $t^2 - 6t + 8 > 0 \quad \Rightarrow \quad t < 2; \quad t > 4$.

Quindi:

- $t < 2 \Rightarrow 2^x < 2 \Rightarrow x < 1$;
- $t > 4 \Rightarrow 2^x > 4 \Rightarrow x > 2$.

Disequazioni che si risolvono con l'uso dei logaritmi

$$a^{f(x)} > b^{g(x)} \Rightarrow \begin{cases} \log_c a^{f(x)} > \log_c b^{g(x)} \Rightarrow f(x)\log_c a > g(x)\log_c b, & \text{se } c > 1 \\ \log_c a^{f(x)} < \log_c b^{g(x)} \Rightarrow f(x)\log_c a < g(x)\log_c b, & \text{se } 0 < c < 1 \end{cases}$$

La disequazione $a^{f(x)} < b^{g(x)}$ si risolve in modo analogo.
Si osservi che, nella pratica, può essere conveniente scegliere come base c del logaritmo la base di una delle due potenze (ovvero, assumere $c = a$ oppure $c = b$).

Ad esempio

- $3^x > 5 \quad \Rightarrow \quad x\log_3 3 > \log_3 5 \quad \Rightarrow \quad x > \log_3 5;$
- $2^x < 3 \quad \Rightarrow \quad x\log_2 2 < \log_2 3 \quad \Rightarrow \quad x < \log_2 3;$
- $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 3 \quad \Rightarrow \quad x\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2} > \log_{\frac{1}{2}} 3 \quad \Rightarrow \quad x > \log_{\frac{1}{2}} 3 = \log_2\frac{1}{3} = -\log_2 3;$

  oppure: $\quad \Rightarrow \quad x\log\frac{1}{2} < \log 3 \quad \Rightarrow \quad x(-\log 2) < \log 3 \quad \Rightarrow \quad x > -\frac{\log 3}{\log 2} = -\log_2 3.$

- *Risolvere la disequazione*: $\quad 3\cdot 5^{2(2x-7)} - 4\cdot 5^{2x-7} + 1 > 0.$

  Posto $5^{2x-7} = y$, la disequazione data si può scrivere nella forma:

  $$3y^2 - 4y + 1 > 0, \quad \text{che è soddisfatta per:} \quad y < \frac{1}{3} \quad \text{e per} \quad y > 1.$$

  Si ha perciò:

  $$5^{2x-7} < \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad 5^{2x-7} > 1.$$

  Dalla prima disequazione, prendendo i logaritmi decimali di ambo i membri, si ha:

  $$(2x-7)\log 5 < \log\frac{1}{3} = -\log 3, \qquad \text{da cui si ricava:} \quad x < \frac{7\log 5 - \log 3}{2\log 5}.$$

  Dalla seconda disequazione, si deduce:

  $$(2x-7)\log 5 > \log 1 = 0, \quad \text{da cui si ricava:} \qquad x > \frac{7}{2}.$$

  Pertanto, la disequazione data è soddisfatta per: $x < \dfrac{7\log 5 - \log 3}{2\log 5}$ e per: $x > \dfrac{7}{2}$.

DISEQUAZIONI LOGARITMICHE

Definizione

Una disequazione si dice *logaritmica* se in essa compare o il logaritmo dell'incognita, o il logaritmo di qualche espressione che contiene l'incognita.

Per risolvere le disequazioni logaritmiche, è necessario ricordare che:

- $\log_a x$ *cresce* al crescere di x se $a > 1$;
  decresce al crescere di x se $0 < a < 1$;
- l'*argomento* del logaritmo deve sempre essere *positivo*.

Si hanno i seguenti casi.

Disequazioni della forma

(1) $\boxed{\log_a f(x) > \log_a g(x) \quad \textbf{oppure:} \quad \log_a f(x) < \log_a g(x)}$ (2)

Se:

$\boxed{a > 1}$ $\Rightarrow$ la disequazione (1) equivale al sistema: $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x). \end{cases}$

$\boxed{0 < a < 1}$ $\Rightarrow$ la disequazione (1) equivale al sistema: $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x). \end{cases}$

Considerazioni analoghe valgono per la (2).

Ad esempio

Risolvere la disequazione: $\log_3 (3x+1) \geq \log_3 (2-x)$.

Si ha:

$$\begin{cases} 3x+1 > 0 \\ 2-x > 0 \\ 3x+1 \geq 2-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{1}{3} \\ x < 2 \\ 4x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{4} \leq x < 2.$$

Disequazioni della forma

(3) $\boxed{\log_a f(x) > b \qquad \textbf{oppure:} \qquad \log_a f(x) < b}$ (4)

Ricordando che $b = \log_a a^b$, se:

$\boxed{a > 1}$ $\Rightarrow$ la (3) diventa: $\log_a f(x) > \log_a a^b \Rightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) > a^b; \end{cases}$

$\boxed{0 < a < 1}$ $\Rightarrow$ la (3) diventa: $\log_a f(x) > \log_a a^b \Rightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < a^b. \end{cases}$

Considerazioni analoghe valgono per la (4).

Ad esempio

Risolvere la disequazione: $\log_{\frac{1}{2}} (x+1) > 0$.

Essendo $0 = \log_{\frac{1}{2}} 1$, si ha:

$$\log_{\frac{1}{2}} (x+1) > \log_{\frac{1}{2}} 1 \Rightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ x+1 < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x < 0 \end{cases} \Rightarrow -1 < x < 0.$$